Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 4. 12. 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis für Informatiker

Blatt 9

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
Bertrand Russell (1872-1970)

Aufgabe 1. (*Stetigkeit, a) und b) jeweils* 2 *Punkte, c)* 3 *Punkte*)

a) Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in D$ heißt *isoliert* in D, wenn ein $r > 0$ existiert, so dass $(a - r, a + r) \cap D = \{a\}$ gilt, d.h., es eine Umgebung von a gibt, so dass a der einzige Punkt in dieser Umgebung ist, der in D liegt. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ automatisch stetig in a ist, falls a isoliert ist.

b) Zeigen Sie nach Definition, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ stetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist. (Hinweis: Probieren Sie zuerst $a = 0$. Für $a \neq 0$ betrachten Sie $x \in (a - 1, a + 1)$, d.h., wählen Sie ein passendes $\delta < 1$.)

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0, \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

stetig in Null ist. Ist sie stetig in anderen Punkten des Definitionsbereiches und warum?

Aufgabe 2. (*Dirichlet-Funktion, a) oder b)* 4 *Zusatzpunkte, sonst mündlich*)

a) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in *keinem* Punkt stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nur in $a = 0$ stetig ist.

(Hinweis: Sie können benutzen, dass sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (*Stetigkeit des Minimums und des Maximums,* 4 *Punkte*)

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in D. Beweisen Sie, dass die Funktionen $f_{\min}, f_{\max} : D \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f_{\min}(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}, \\ f_{\max}(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

ebenfalls stetig in D sind.
(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

gilt, und finden Sie eine entsprechende Formel für $\min\{a, b\}$.)

Aufgabe 4. (*Gleichmäßige Stetigkeit, mündlich*)

Beweisen Sie, dass die Funktion f gegeben durch $f(x) = x^2$ in jedem Intervall der Form $[-N, N]$ für $N > 0$ gleichmäßig stetig ist. Ist sie in ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 11. 12. 2017 abzugeben.