

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 14

Lösungen bitte zur Übung am 26. Januar 2018 mitbringen

Aufgabe 53. Verwenden Sie die Methode der Charakteristiken, um die folgenden Cauchyprobleme zu lösen:

- (a) $x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u = 2u, \quad u(x_1, 1) = g(x_1).$
- (b) $x_1 \partial_1 u + 2x_2 \partial_2 u + \partial_3 u = 3u, \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2).$
- (c) $u \partial_1 u + \partial_2 u = 1, \quad u(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1.$

Aufgabe 54. Sei $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld und sei $X(s) = X(s; x, t)$ die Lösung der GDG

$$\dot{X} = B(X), \quad X(t; x, t) = x,$$

wobei $\dot{X} := \partial_s X$.

(a) Sei

$$J(s, x, t) := \det D_x X(s; x, t)$$

die Jacobi-Determinante. Beweisen sie die Euler'sche Formel

$$\partial_s J = \operatorname{div} B(X) J.$$

Hinweis zu (a): Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$. In dem allgemeinen Fall verwenden Sie die Definition der Determinante mit Permutationen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$u(x, t) := g(X(0; x, t)) J(0, x, t)$$

eine Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(uB) = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Hinweis zu (b): zeigen Sie, dass $u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) = g(x)$.

Lösung. (a). Wir beweisen, dass $\partial_s J = \operatorname{div} B(X) J$ (in Dimension n), indem wir die Definition der Determinante mit Permutationen verwenden, genauso, wie wir gemacht haben in Dimension $n = 2$. Wir haben

$$D_x X = \begin{pmatrix} \partial_1 X_1 & \partial_2 X_1 & \cdots & \partial_n X_1 \\ \partial_1 X_2 & \partial_2 X_2 & \cdots & \partial_n X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1 X_n & \partial_2 X_n & \cdots & \partial_n X_n \end{pmatrix}.$$

Deswegen

$$\det D_x X = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \partial_{\sigma(1)} X_1 \partial_{\sigma(2)} X_2 \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n,$$

wobei S_n ist die symmetrische Gruppe, d.h. die Gruppe von allen Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ und ε_σ ist das Vorzeichen der Permutation $\sigma \in S_n$. Wir berechnen jetzt die ∂_s Ableitung, indem wir die Leibnizregel verwenden:

$$\begin{aligned} & \partial_s(\det D_x X) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \sum_{j=1}^n \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_s(\partial_{\sigma(j)} X_j) \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] \\ & \quad (\text{Ableitung } \partial_s \text{ und } \partial_{\sigma(j)} \text{ umtauschen}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \sum_{j=1}^n \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_{\sigma(j)}(\partial_s X_j) \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] \\ & \quad (\text{wir verwenden die GDG } \partial_s X_j = B_j(X)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \sum_{j=1}^n \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_{\sigma(j)}(B_j(X)) \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] \\ & \quad (\text{wir verwenden die Kettenregel}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \sum_{j=1}^n \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \sum_{k=1}^n \partial_k B_j(X) \partial_{\sigma(j)} X_k \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] \\ & \quad (\text{wir tauschen die Summen und die Terme um}) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \partial_k B_j(X) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_{\sigma(j)} X_k \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] \\ & \quad (\text{wir teilen die Summe für } j, k \text{ in zwei Teilen: } j = k \text{ und } j \neq k) \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j B_j(X) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_{\sigma(j)} X_j \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] \\ & \quad + \sum_{j \neq k} \partial_k B_j(X) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_{\sigma(j)} X_k \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right]. \end{aligned}$$

Der erste Term in der letzten Summe ist genau $\text{div} B(X)J$. Es ist noch zu beweisen, dass der zweite Term gleich null ist. Wir beweisen, dass für alle festen $j \neq k$, es gilt

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \left[\partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j-1)} X_{j-1} \right] \partial_{\sigma(j)} X_k \left[\partial_{\sigma(j+1)} X_{j+1} \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \right] = 0. \quad (1)$$

Wir machen die folgenden Bemerkung. Sei $\sigma \in S_n$ die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Da $j \neq k$, gibt es in S_n eine andere Permutation $\tilde{\sigma}$, so dass

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Außerdem, $\varepsilon_{\tilde{\sigma}} = -\varepsilon_{\sigma}$, da $\tilde{\sigma}$ kann von σ erhalten werden mit einer Vertauschung zweier Zahlen. Betrachten wir jetzt in der Summe in (1) nur die Termen, die σ und $\tilde{\sigma}$ entsprechen:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\sigma} \partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j)} X_k \cdots \partial_{\sigma(k)} X_k \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n + \varepsilon_{\tilde{\sigma}} \partial_{\tilde{\sigma}(1)} X_1 \cdots \partial_{\tilde{\sigma}(j)} X_k \cdots \partial_{\tilde{\sigma}(k)} X_k \cdots \partial_{\tilde{\sigma}(n)} X_n \\ &= \varepsilon_{\sigma} \partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(j)} X_k \cdots \partial_{\sigma(k)} X_k \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n - \varepsilon_{\sigma} \partial_{\sigma(1)} X_1 \cdots \partial_{\sigma(k)} X_k \cdots \partial_{\sigma(j)} X_k \cdots \partial_{\sigma(n)} X_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wie ich in der Unterricht gesagt habe, gibt es auch einen zweiten (und vielleicht schöneren) Beweis von der Gleichung $\partial_s J = \operatorname{div} B(X) J$. Wir haben $J = \det D_x X$. Um $\partial_s J = \partial_s \det D_x X$ zu berechnen, wollen wir die Kettenregel verwenden, wie folgt.

Wir betrachten die Funktion “Determinante” als Funktion von dem Raum von Matrices $M^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ in $\mathbb{R}$:

$$\det : M^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Ableitung (das Differential) von $\det$ in einem bestimmten Punkt $A \in M^{n \times n}$ ist eine lineare Abbildung

$$(D\det)(A) : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad B \mapsto (D\det)(A)[B].$$

Berechnen wir das Differential von $\det$ im Punkt $A = I$, wobei I die Identitätsmatrix ist. Dank der Definition von Differential, haben wir für alle $B \in M^{n \times n}$

$$D(\det)(I)[B] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \varepsilon B) - \det(I)}{\varepsilon}.$$

Wenn $B = (b_{ij})$, dann

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon b_{11} & \varepsilon b_{12} & \cdots & \varepsilon b_{1n} \\ \varepsilon b_{21} & 1 + \varepsilon b_{22} & \cdots & \varepsilon b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon b_{n1} & \cdots & \cdots & 1 + \varepsilon b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Deswegen

$$\det(I + \varepsilon B) = (1 + \varepsilon b_{11})(1 + \varepsilon b_{22}) \cdots (1 + \varepsilon b_{nn}) + \varepsilon^2(\cdots).$$

Es ist nicht wichtig, was ist der letzte Term $(\cdots)$. Wichtig ist, dass dieser Term durch den Koeffizient ε^2 multipliziert wird. Deswegen

$$\det(I + \varepsilon B) = 1 + \varepsilon \sum_{j=1}^n b_{jj} + \varepsilon^2(\cdots).$$

Deshalb

$$\begin{aligned}
D(\det)(I)[B] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \varepsilon B) - \det(I)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 + \varepsilon \sum_{j=1}^n b_{jj} + \varepsilon^2(\dots) - 1 \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n b_{jj} + \varepsilon(\dots) \\
&= \sum_{j=1}^n b_{jj} \\
&= \text{Spur}(B).
\end{aligned}$$

Fazit: das Differential von $\det$ im Punkt $A = I$ ist die lineare Abbildung Spur. Wir wollen jetzt das Differential von $\det$ bestimmen für eine beliebige Matrix A . Nehmen wir zunächst an, dass A invertierbar ist. Wir haben

$$\begin{aligned}
(D\det)(A)[B] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(A + \varepsilon B) - \det(A)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det((I + \varepsilon B A^{-1})A) - \det(A)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \varepsilon B A^{-1}) - 1}{\varepsilon} \det(A) \\
&= \text{Spur}(B A^{-1}) \det A.
\end{aligned}$$

Man kann bemerken, dass $(\det A)A^{-1} = (\text{cof } A)^T$ und dann

$$(D\det)(A)[B] = \text{Spur}(B A^{-1}) \det A = \text{Spur}\left(B A^{-1} \det(A)\right) = \text{Spur}(B(\text{cof } A)^T)$$

und man kann beweisen, dass diese Formel auch für Matrizen A gilt, die nicht invertierbar sind. Wir brauchen aber nur die Formel

$$(D\det)(A)[B] = \text{Spur}(B A^{-1}) \det(A), \quad (\text{m})$$

da wir nur mit den Matrizen $D_x X$ arbeiten, die invertierbar sind.

Wir können jetzt die Ableitung $\partial_s J = \partial_s(\det D_x X)$ berechnen, indem wir die Kettenregel verwenden:

$$\begin{aligned}
\partial_s J &= (D\det)(D_x X)[\partial_s D_x X] \\
(\text{wir tauschen die Ableitungen um}) &= (D\det)(D_x X)[D_x \partial_s X] \\
(\text{wir verwenden die GDG}) &= (D\det)(D_x X)[D_x(B(X))] \\
(\text{noch einmal Kettenregel}) &= (D\det)(D_x X)[DB(X)D_x X] \\
(\text{Formel (m)}) &= \text{Spur}\left(DB(X)D_x X(D_x X)^{-1}\right) \det(D_x X) \\
&= \text{Spur}(DB(X)) \det(D_x X) \\
(\text{da } \text{Spur}(DB) &= \text{div } B = \text{div } B(X) \det(D_x X).
\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen jetzt den Hinweis zu (b), d.h. wir zeigen, dass

$$u(X(t, x, 0), t)J(t, x, 0) = g(x).$$

Wir bemerken zunächst, dass die Identität

$$X(0, X(t, x, 0), t) = x$$

gilt, dank der Definition von X und der GDG $\dot{X} = B(X)$. Deswegen, wenn wir die letzte Gleichung nach x ableiten, erhalten wir (noch einmal Kettenregel)

$$D_x X(0, X(t, x, 0), t) D_x X(t, x, 0) = I,$$

wobei I die Identitätsmatrix ist. Wir können jetzt die Definition von u verwenden:

$$\begin{aligned} u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) &= g(X(0, X(t, x, 0), t)) J(0, X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) \\ &= g(X(0, X(t, x, 0), t)) \det \left[D_x X(0, X(t, x, 0), t) D_x X(t, x, 0) \right] \\ &= g(x) \det(I) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Mit der Hilfe von dem Hinweis, können wir jetzt Punkt (b) beweisen. Wir starten mit der Gleichung in dem Hinweis:

$$u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) = g(x)$$

und wir ableiten beide Seiten nach t :

$$\frac{d}{dt} \left[u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) \right] = 0. \quad (\text{n})$$

Wir berechnen jetzt die Ableitung auf der linken Seite:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) \right] \\ &\quad (\text{Leibnizregel}) \\ &= \frac{d}{dt} \left[u(X(t, x, 0), t) \right] J(t, x, 0) + u(X(t, x, 0), t) \frac{d}{dt} J(t, x, 0) \\ &\quad (\text{Kettenregel und Teil (a) der Übung}) \\ &= D_x u(X(t, x, 0), t) \partial_t X(t, x, 0) J(t, x, 0) + \partial_t u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) \\ &\quad + u(X(t, x, 0), t) \operatorname{div} B(X(t, x, 0)) J(t, x, 0) \\ &\quad (\text{die GDG } \dot{X} = B(X)) \\ &= D_x u(X(t, x, 0), t) B(X(t, x, 0)) J(t, x, 0) + \partial_t u(X(t, x, 0), t) J(t, x, 0) \\ &\quad + u(X(t, x, 0), t) \operatorname{div} B(X(t, x, 0)) J(t, x, 0) \\ &\quad (\text{Leibnizregel}) \\ &= \left[\partial_t u(X(t, x, 0), t) + \operatorname{div} (B(X(t, x, 0)) u(X(t, x, 0), t)) \right] J(t, x, 0). \end{aligned}$$

Deswegen, da $J(t, x, 0) \neq 0$, für alle (x, t)

$$\partial_t u(X(t, x, 0), t) + \operatorname{div}\left(B(X(t, x, 0))u(X(t, x, 0), t)\right) = 0.$$

Da die Abbildung $x \mapsto y := X(t, x, 0)$ invertierbar ist, erhalten wir für alle (y, t) :

$$\partial_t u(y, t) + \operatorname{div}(B(y)u(y, t)) = 0.$$

Die Anfangsbedingung gilt, da $X(0, x, 0) = x$ und $J(0, x, 0) = 1$.

Aufgabe 55. Seien $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Betrachten Sie die skalare Haltungsungleichung $\partial_t u + \operatorname{div} F(u) = 0$ in der äquivalenten Form

$$\partial_t u + F'(u) \cdot Du = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (12)$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = g(x) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

- (a) Finden Sie die charakteristischen Gleichungen und zeigen Sie, dass die Anfangsbedingung eine nicht-charakteristische Nebenbedingung entspricht.
- (b) Finden Sie die Parameterdarstellung der Lösung u und zeigen Sie, dass die Lösung u die Gleichung

$$u = g(x - tF'(u)) \quad (13)$$

erfüllt.

- (c) Umgekehrt, zeigen Sie, dass, falls u die Gleichung (13) erfüllt und

$$1 + tDg(x - tF'(u)) \cdot F''(u) \neq 0,$$

dann u eine Lösung von (12) ist.

Lösung. (a). Wir arbeiten wie in der Übung 53. Die PDG ist

$$\partial_t u + F'_1(u)\partial_1 u + F'_2(u)\partial_2 u + \cdots + F'_n(u)\partial_n u = 0.$$

Eine mögliche Parametrisierung von der Hyperfläche $\Gamma = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, wo die Anfangsbedingung definiert ist, ist die folgende. Der Parameter ist $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ und die Parametrisierung ist

$$t = 0, \quad x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n.$$

Die Charakteristiken sind durch die folgenden GDG definiert (wir verwenden τ als Parameter von der Kurve, d.h. der Punkt bezeichnet die Ableitung nach τ):

$$\begin{aligned} \dot{T}(\tau, s) &= 1, & T(0, s) &= 0, \\ \dot{X}_1(\tau, s) &= F'_1(u), & X_1(0, s) &= s_1, \\ &\dots, \\ \dot{X}_n(\tau, s) &= F'_n(u), & X_n(0, s) &= s_n, \\ \dot{U}(\tau, s) &= 0, & U(0, s) &= g(s). \end{aligned}$$

Die Lösungen dann sind

$$\begin{aligned} U(\tau, s) &= g(s), \\ T(\tau, s) &= \tau, \\ X_j(\tau, s) &= F'_j(g(s))\tau + s_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

und dann ist die Parameterdarstellung der Lösung:

$$u\left(F'_1(g(s))\tau + s_1, \dots, F'_n(g(s))\tau + s_n, \tau\right) = g(s). \quad (\text{o})$$

Um eine explizite Form der Lösung zu finden, sollten wir die Abbildung $\Phi : (\tau, s_1, \dots, s_n) \mapsto (t, x_1, \dots, x_n)$ invertieren, die durch

$$\begin{cases} t = \tau, \\ x_1 = X_1(\tau, s) = F'_1(g(s))\tau + s_1, \\ \dots \\ x_n = X_n(\tau, s) = F'_n(g(s))\tau + s_n, \end{cases} \quad (\text{p})$$

definiert ist. Wir können das hier nicht explizit machen, da wir die Funktionen g und F nicht explizit kennen. Aber wir können zeigen, dass Φ lokal invertierbar ist neben Γ , d.h. dass die Anfangsbedingung eine nicht charakteristische Randbedingung entspricht. Um das zu zeigen, sollen wir beweisen, dass das Differential $D\Phi(0, s)$ invertierbar ist für alle $s \in \mathbb{R}^n$. Das Differential ist

$$D\Phi(0, s) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & I \end{array} \right),$$

wobei I die Identitätsmatrix ist und $*$ bezeichnet Zahlen, die uns nicht interessieren. Die Determinante von $D\Phi$ ist dann

$$\det D\Phi(0, s) = 1 \neq 0,$$

und dann ist $D\Phi$ invertierbar in einer Umgebung von $(0, s)$ für alle $s \in \mathbb{R}^n$. In anderen Wörtern entspricht die Anfangsbedingung eine nicht charakteristische Randbedingung.

(b). Wir schreiben noch einmal die Parameterdarstellung (o) und den Variablenwechsel (p) in einer kürzeren Form:

$$u(F'(g(s))\tau + s, \tau) = g(s),$$

und

$$\begin{cases} x &= F'(g(s))\tau + s, \\ t &= \tau. \end{cases}$$

Aus dem Variablenwechsel erhalten wir

$$\begin{cases} s &= x - F'(g(s))t = x - F'(u)t, \\ \tau &= t, \end{cases}$$

und dann

$$u(x, t) = g(x - F'(u)t).$$

(c). Wir werden hier die folgende Notation für Ableitungen verwenden. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Das Differential $Df(x)$ im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist entspricht eine $m \times n$ Matrix. Mit dieser Notation, falls $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dann das Gradient $Df(x)$ von f in x ist ein Zeilenvektor, nicht ein Spaltenvektor!

Diese Notation ist nützlich, wenn wir die Kettenregel verwenden wollen. Nämlich, falls

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^d,$$

dann

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x).$$

Nämlich, auf der linken Seite haben wir eine $d \times n$ Matrix, und auf der rechten Seite haben wir das Produkt zwischen eine $d \times m$ und eine $m \times n$ Matrix.

Sei jetzt u so dass

$$u(x, t) = g(x - tF'(u(x, t))).$$

Wir berechnen die Ableitungen nach t

$$\partial_t u = Dg(x - tF'(u)) \left[-F'(u) - tF''(u)\partial_t u \right].$$

und nach x

$$D_x u = Dg(x - tF'(u)) \left[I - tF''(u)D_x u \right],$$

wobei noch einmal I die Identitätsmatrix ist.

Wir wollen beweisen, dass u die Gleichung $\partial_t u + F'(u)D_x u$ erfüllt. Nach unserer Notation, sollen wir das Skalarprodukt $F'(u) \cdot D_x u$ als $D_x u F'(u)$ schreiben. Nämlich, $D_x u$ ist eine $1 \times n$ Matrix und $F'(u)$ ist eine $n \times 1$ Matrix. Das Skalarprodukt ist dann das Matrixprodukt $D_x u F'(u)$.

Wir haben dann

$$\begin{aligned} \partial_t u + D_x u F'(u) &= Dg(x - tF'(u)) \left[-F'(u) - tF''(u)\partial_t u \right] + Dg(x - tF'(u)) \left[I - tF''(u)D_x u \right] F'(u) \\ &= -Dg(x - tF'(u))F'(u) - tDg(x - tF'(u))F''(u)\partial_t u \\ &\quad + Dg(x - tF'(u))F'(u) - tDg(x - tF'(u))F''(u)D_x u F'(u) \\ &= -tDg(x - tF'(u))F''(u) \left[\partial_t u + D_x u F'(u) \right]. \end{aligned}$$

Deswegen

$$\left[I + tDg(x - tF'(u))F''(u) \right] \left[\partial_t u + D_x u F'(u) \right] = 0.$$

Da

$$I + tDg(x - tF'(u))F''(u) \neq 0,$$

erhalten wir

$$\partial_t u + D_x u F'(u) = 0.$$