# ÜA Funktionalanalysis 1 - 1. Serie

1. (mündlich)

   (a) Sei $X$ eine nichtleere Menge und

   $$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq y \\ 0 & \text{für} \quad x = y \end{cases} \qquad (x, y \in X)\,.$$

   Zeigen Sie, dass $(X,d)$ ein metrischer Raum ist. (Ein solcher metrischer Raum heißt *diskret*).

   (b) Geben Sie Charakterisierungen (d.h. äquivalente Bedingungen) an für

   - konvergente Folgen / Cauchyfolgen in $(X,d)$
   - offene / abgeschlossene / kompakte Mengen in $(X,d)$.
   - stetige Abbildungen $f : X \to Y$ von $X$ in einen beliebigen anderen metrischen Raum $Y$

   (c) Ist $(X,d)$ vollständig?

2. (schriftlich) Zeigen Sie:

   (a) Auf der Menge $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen wird durch

   $$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \qquad (x = (x_k),\, y = (y_k) \in X)$$

   eine Metrik $d$ definiert.
   *Hinweis zum Nachweis der Dreiecksungleichung.*
   Man betrachte die Funktion $f(t) = \frac{t}{1+t}$ und zeige, dass sie auf $[0,\infty)$ streng monoton wächst.

   (b) Für $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ und $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ $(n \in \mathbb{N})$ in $X$ gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)}, a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_k^{(n)} - a_k| = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

   (D.h. Konvergenz in $(X,d)$ ist die koordinatenweise Konvergenz.)

**Abgabe der Lösungen:** Dienstag, 17.10.2017, vor der Vorlesung