Übungsblatt 2

1) a) Sei μ ein äusseres Mass auf der Menge X. Beweisen Sie, dass $M \subset X$ μ-messbar ist falls $\mu(M) = 0$.

b) Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum[1]. Zeigen Sie, dass $\nu(M) = \inf\{\mu(A) : M \subset A \in \mathfrak{A}\}$ ein äußeres Maß auf X ist, und dass $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\nu$, d.h. jede Menge aus $\mathfrak{A}$ ist ν-meßbar, und dass $\mu(A) = \nu(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$.

1+4 Punkte

2) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}^d$ das Gitter aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im $\mathbb{R}^d$ und $\#M$ die Anzahl der Elemente in einer Menge M.

a) Beweisen Sie, dass für jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#([a,b] \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z})}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\#\{x \in [a,b] \,:\, kx \in \mathbb{Z}\}}{k} = b - a.$$

Ist dies auch für offene und halboffene Intervalle gültig?

b) Zeigen Sie nun, dass für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$ $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\#(Q \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d)}{k^d} = \mathrm{EI}(Q)$ gilt.

3+2 Punkte

3) Zeigen Sie, dass folgende Mengen Lebesguemaß Null haben

i) $\mathrm{graph}(f)$ in $\mathbb{R}^2$ wenn $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig,

ii) $\{(x,y,z) \,:\, x + y + z = 0\}$ im $\mathbb{R}^3$.

2+3 Punkte

4) Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt dyadisch, genau dann wenn es $k, m \in \mathbb{Z}$ gibt mit $2^k I = [0,1) + m$. Analog ist C ein dyadischer Würfel im $\mathbb{R}^d$, wenn

$$\exists k \in \mathbb{Z} \exists (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \,:\, 2^k C = [0,1)^n + (m_1, \dots, m_d).$$

a) Welche der folgenden Intervalle bzw. Würfel sind dyadisch?

$$I_1 = [8, 16), I_2 = [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}), I_3 = [6, 10), W_1 = [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}), W_2 = [-\frac{7}{8}, -\frac{6}{8}) \times [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}).$$

b) Seien $k, l, m \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $t \in [m, m+1) \cap [k, l)$. Zeigen Sie, dass $[m, m+1) \subset [k, l)$. Schlussfolgern Sie, dass zwei dyadische Intervalle entweder disjunkt sind, oder eines in dem anderen enthalten ist und leiten Sie daraus ein analoge Aussage für dyadische Würfel her.

c) Zeigen Sie, dass jede offene beschränkte Menge $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^d$ eine disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln ist! (Betrachten Sie dazu die Familie aller dyadischen Würfel, die in G enthalten sind aber in keinem grösseren dyadischen Würfel, der auch Teilmenge von G ist.) Bleibt die Aussage für unbeschränktes offenes G richtig?

Begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig! 2+3+5 Punkte

[1] Bitte wenden

Abgabe am 25.10.2017, 9.10 Uhr Hörsaal 5

Zusatzaufgabe (ohne Punkte). Beweisen Sie, dass die beiden Rotationen

$$Z = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & \\ 4 & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \text{ und } X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 3 & -4 \\ & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

und die $z-$ bzw die x-Achse eine freie Untergruppe in $SO(3)$ erzeugen, d.h.für

$R = X^{a_1}Z^{b_1} \cdot \ldots \cdot X^{a_n}Z^{b_n}$, mit $n \in \mathbb{N}, \forall i \leq n : a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ und $a_i b_j \neq 0$ wenn $i > 0 \,\&\, j < n$

gilt $R = Id$ genau dann, wenn $n = 1$ und $a_1 = b_1 = 0$ (das heisst R dem trivialen Produkt entspricht)

Zeigen Sie hierfür

a) wenn es ein Gegenbeispiel R gibt, dann kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_n = 1$ annehmen, also R kann man schreiben als $R = P_k$ wobei $P_0 = Id$, $P_l = M_l P_{l-1}$, wobei $M_1 = Z$, $M_j \in \{X, X^{-1}, Z, Z^{-1}\}$ und $M_j M_{j-1} \neq Id$ für alle $j = 2, \ldots, k$.

b) Wir definieren nun $v_l = 5^l P_l(1,0,0)^T = (a_l, b_l, c_l)^T \in \mathbb{Z}^3$. Zeigen Sie b_1, b_2 sind nicht durch 5 teilbar und, dass auch auch alle anderen b_l nicht durch 5 teilbar sind.
[Rechnen bzgl einer geeigneten Restklasse könnte sehr hilfreich sein]

Abgabe bitte direkt an Prof Kirchheim

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein **Maßraum**, wenn X ein Menge ist, $\mathcal{A}$ eine σ-algebra auf X ist, d.h.:

i) $\emptyset \in \mathcal{A} \subset 2^X$,
ii) wenn $A \in \mathcal{A}$, dann $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
iii) wenn $\forall n \in \mathbb{N}; A_n \in \mathcal{A}$, dann $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß ist, d.h.

$$\mu(\emptyset) = 0 \text{ und } \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \text{ falls } \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A} \text{ und } A_n \cap A_m = \emptyset \;\; \forall n \neq m.$$