Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 6. 11. 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis für Informatiker

Blatt 5

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Aufgabe 1. (*Konvergente Folgen, a)* 2 *Punkte, c)* 4 *Punkte*)

a) Zeigen Sie mittels der Definition, dass die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Was ändert sich, wenn man die Folge $\left(\frac{1}{n^{1/k}}\right)_{n=1}^{\infty}$ für eine vorgegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$ betrachtet?

b) Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für jedes $n \geq n_0$ gibt, dann $a \leq b$ gilt. Kann man $\leq$ durch $<$ ersetzen?

c) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz:

$$\begin{aligned} a_n :=& 1 + (-1)^n, \\ b_n :=& \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2017}, \\ c_n :=& (1 + (-1)^n)\frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}, \\ d_n :=& \frac{1+(-1)^n}{1+\sqrt{n}}, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (*Konvergente Folgen,* 5 *Punkte*)
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz.

$$\begin{aligned} a_n :=& \frac{2n^5 - n^3}{n^5 + 518n}, \\ b_n :=& \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}, \\ c_n :=& \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \\ d_n :=& \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, \\ e_n :=& \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{n+5}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (*Logarithmus, mündlich*)

Beweisen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Exponentialfunktion die folgenden Eigenschaften des Logarithmus.

a) $\log(x^n) = n \log x$ für alle $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$ für alle $a, b > 0$.

c) $\log(1 + x) < x$ für alle $x > -1$ mit $x \neq 0$.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 13. 11. 2017 abzugeben.