Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 7

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 29.11.2017, 10:45 Uhr im Hörsaal 6 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{N}$ definierte Relation

$$R = \{(a, b) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid \exists k \in \mathbb{N} : 2a + b = 3k\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Untersuchen Sie, ob diese Relation vollständig ist. Geben Sie fünf Zahlen an, die in der Äquivalenzklasse $[2]_R$ liegen. (5P)

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Relation

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})) \mid a + 4d = c + 4b\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Untersuchen Sie, ob diese Relation vollständig ist. Geben Sie fünf Elemente der Äquivalenzklasse $[(2, 7)]_R$ an. (5P)

Aufgabe 3

Gegeben sei die auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Äquivalenzrelation

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})) \mid a + d = b + c\}$$

(vgl. Satz 5.5). Durch

$$[(a, b)]_R \odot [(c, d)]_R = [(ac + bd, ad + bc)]_R$$

ist eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ definiert (vgl. Definition 5.7).

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: $[(a, b)]_R \odot [(c, c + 1)]_R = [(b, a)]_R$.
Welche der folgenden Eigenschaften von ganzen Zahlen wird dadurch gezeigt? Wählen Sie die korrekt Eigenschaft aus. Für alle $y, z \in \mathbb{Z}$ gilt: (3P)

$$z \cdot 0 = 0 \qquad z \cdot (-1) = -z \qquad 1 \cdot (-1) = -1 \qquad z \cdot y = (-z) \cdot (-y) \qquad (-1) \cdot (-1) = 1$$

bitte wenden

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $[(n, n+1)]_R \odot [(n, n+1)]_R = [(n+1, n)]_R$.
Welche der folgenden Eigenschaften von ganzen Zahlen wird dadurch gezeigt? Wählen Sie die korrekt Eigenschaft aus. Für alle $y, z \in \mathbb{Z}$ gilt: (3P)

$$z \cdot 0 = 0 \qquad z \cdot (-1) = -z \qquad 1 \cdot (-1) = -1 \qquad z \cdot y = (-z) \cdot (-y) \qquad (-1) \cdot (-1) = 1$$

c) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: $[(a, b)]_R \odot [(c, c)]_R = [(c, c)]_R$.
Welche der folgenden Eigenschaften von ganzen Zahlen wird dadurch gezeigt? Wählen Sie die korrekt Eigenschaft aus. Für alle $y, z \in \mathbb{Z}$ gilt: (3P)

$$z \cdot 0 = 0 \qquad z \cdot (-1) = -z \qquad 1 \cdot (-1) = -1 \qquad z \cdot y = (-z) \cdot (-y) \qquad (-1) \cdot (-1) = 1$$