4.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Freitag, 3.11.2017
Abgabe: Freitag, 10.11.2017 bis **spätestens** 12:00 Uhr im Postfach Hardtke im Raum A 514 oder im Anschluß an die Donnerstagsvorlesung (verspätete Abgaben werden nicht bewertet).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen **selbstständig** bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (mit Begründung):

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n-2}{4n^3+n^2+\sqrt[n]{n}}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+|n^5+(-1)^n n^4-30n^3|}{2n^5+10n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n^2} n3^{-n}-2n}{n+5}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n+n}$

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)**.**
1) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = 0.$$

2) Zeigen $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.
3) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (mit Begründung):

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

Hinweis zu (a): Gaußsche Summenformel. Hinweis zu (b): Bernoulli-Ungleichung.

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte)**.** Wir definieren rekursiv eine Folge nichtnegativer Zahlen durch

$$a_0 := 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es ist also $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, usw.
Zeigen Sie:
1) $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (vollständige Induktion).
2) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.
3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.