

Analysis 1

Serie 3

Abgabe: 02.11. vor der Vorlesung in den Briefkästen im Raum A514

Aufgabe 1 (Punkte: 2+2).

(a) Zeige für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^{m+1} - y^{m+1} = (x - y) \left(\sum_{k=0}^m x^k y^{m-k} \right).$$

(b) Zeige für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^m x^k = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}.$$

Aufgabe 2 (Punkte: 3+3). Sei R die Relation auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$R = \{((x, y), (p, q)) \mid \exists z \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } (x + z = p \wedge y + z = q) \vee (p + z = x \wedge q + z = y) \vee (x, y) = (p, q)\}.$$

(a) Zeige R ist Äquivalenzrelation.

(b) Definiere $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow (\mathbb{R}_+ \times \{0, 1\}) \cup \{0\}$ durch

$$F((p, q)) = \begin{cases} (z, 1), & \text{falls } p + z = q \\ 0, & \text{falls } p = q \\ (z, 0), & \text{falls } q + z = p. \end{cases}$$

Beweis: Dann ist $\mathbb{F}([(p, q)]_R) := F((p, q))$ eine bijektive Abbildung auf

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ / R := \{[(p, q)]_R \mid (p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\},$$

wobei

$$[(p, q)]_R = \{(p', q') \mid ((p, q), (p', q')) \in R\}.$$

Aufgabe 3 (Punkte: 6). Zeige für $k, n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}_+$, dass

$$(1+x)^m > \left(\frac{x}{2k}\right)^k m^k$$

für $m > 2k$.

Aufgabe 4 (Punkte: 2+2+2). Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und $m^2 \leq x \leq (m+1)^2$. Definiere

$$a_0 = m \text{ und } a_{i+1} = a_i + \frac{x - a_i^2}{3a_i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+.$$

- (a) Zeige $a_i^2 \leq x$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- (b) Zeige $a_{i+1} \geq a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- (c) Zeige für $a = \sup\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ gilt $a^2 = x$.