Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 10
Lösungen bitte zur Übung am 15. Dezember 2017 mitbringen

Aufgabe 37. Sei $n = 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stückweise stetig (d.h. stetig bis auf endlich viele Sprünge), und

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x^+) + g(x^-)\big) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Sei

$$\Phi(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x|^2/(4t)}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Wir wissen dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,t)dx = 1$ für alle $t > 0$ und Φ ist symmetrisch in x. Deswegen

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi(x,t)dx = \int_{0}^{+\infty} \Phi(x,t)dx = \frac{1}{2}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
u(x,t) &- \frac{1}{2}g(x^+) - \frac{1}{2}g(x^-) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-y,t)g(y)dy - \frac{1}{2}g(x^+) - \frac{1}{2}g(x^-) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y,t)g(x-y)dy - \frac{1}{2}g(x^+) - \frac{1}{2}g(x^-) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \Phi(y,t)g(x-y)dy - \int_{-\infty}^{0} \Phi(y,t)g(x^+)dy \\
&\qquad + \int_{0}^{+\infty} \Phi(y,t)g(x-y) - \int_{0}^{+\infty} \Phi(y,t)g(x^-)dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \Phi(y,t)\big[g(x-y) - g(x^+)\big]dy \\
&\qquad + \int_{0}^{+\infty} \Phi(y,t)\big[g(x-y) - g(x^-)\big]dy
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Da f stückweise stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass:

- für alle $z \in \mathbb{R}$, falls $z < x$ und $|z - x| < \delta$, dann $|g(z) - g(x^-)| < \varepsilon$;
- für alle $z \in \mathbb{R}$, falls $z > x$ und $|z - x| < \delta$, dann $|g(z) - g(x^+)| < \varepsilon$.

Wir können dann schreiben

$$\begin{aligned}
&\left|u(x,t)-\frac{1}{2}g(x^+)-\frac{1}{2}g(x^-)\right| \\
&\qquad \leq \int_{-\infty}^{0}\Phi(y,t)\big|g(x-y)-g(x^+)\big|dy+\int_{0}^{+\infty}\Phi(y,t)\big|g(x-y)-g(x^-)\big|dy\Big| \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{-\delta}\Phi(y,t)\big|g(x-y)-g(x^+)\big|dy+\int_{-\delta}^{0}\Phi(y,t)\big|g(x-y)-g(x^+)\big|dy \\
&\qquad\quad + \int_{\delta}^{+\infty}\Phi(y,t)\big|g(x-y)-g(x^-)\big|dy+\int_{0}^{+\delta}\Phi(y,t)\big|g(x-y)-g(x^-)\big|dy \\
&\qquad \leq 2\|g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}\Phi(y,t)dy+2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir wissen schon (aus der Vorlesung), dass, für festen $\delta>0$,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}\Phi(y,t)dy\to 0 \text{ mit } t\to 0.$$

Deswegen

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to 0}\left|u(x,t)-\frac{1}{2}g(x^+)-\frac{1}{2}g(x^-)\right| &\leq 2\varepsilon+2\|g\|_{L^\infty}\limsup_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}\Phi(y,t)dy \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir

$$\limsup_{t\to 0}\left|u(x,t)-\frac{1}{2}g(x^+)-\frac{1}{2}g(x^-)\right|=0.$$

Aufgabe 38 (Der Approximationssatz von Weierstraß)**.** Benutzen Sie die Darstellung der Lösung der eindimensionaler Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}$ als $u(x,t)=\int\Phi(x-y,t)g(y)\,dy$ um folgende Aussage zu beweisen:

Sei $f\in C([a,b])$; es existiert eine Folge von Polynomen $\{P_N(x)\}$ so dass $P_N(x)\to f(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Erweiterung $g\in BC(\mathbb{R})$ von f und betrachten Sie die dazugehörige Lösung $u(x,t)$.

Lösung. Wir fangen mit zwei Bemerkungen an.

- Sei $P=P(x)$, $x\in\mathbb{R}$, ein Polynom. Sei $g\in C_c(\mathbb{R})$. Dann ist $P\star g$ ein Polynom.

Beweis: Sei $P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$. Dann

$$\begin{aligned}
P \star g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k (x-y)^k g(y) \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} g(y)dy \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^{k-j} g(y)dy \right]
\end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck ist ein Polynom in x.

- Seien Φ_N, Φ, $N \in \mathbb{N}$, Funktionen in $C(\mathbb{R})$. Falls $\Phi_N \to \Phi$ gleichmäßig auf kompakten Mengen, mit $N \to \infty$, dann $\Phi_N \star g \to \Phi \star g$ gleichmäßig auf kompakten Mengen, für alle $g \in C_c(\mathbb{R})$.

  Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\Phi_N \star g(x) - \Phi \star g(x)\Big| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_N(x-y)g(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-y)g(y)dy \right| \\
&\le \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\Phi_N(x-y) - \Phi(x-y)\big||g(y)|dy \\
&\le \|\Phi_N - \Phi\|_{L^\infty(x-\mathrm{supp} g)} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy \\
&\le \|\Phi_N - \Phi\|_{L^\infty(x-\mathrm{supp} g)} \|g(y)\|_{L^1} dy \to 0 \text{ mit } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Wir können jetzt den Satz von Weierstraß beweisen. Sei g eine Erweiterung von f (d.h. $g \equiv f$ in $[a,b]$), so dass $g \in C_c(\mathbb{R})$. Der Wärmeleitungskern Φ hat der Form

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x|^2/(4t)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right),$$

wobei

$$\Psi(r) := e^{-r^2}.$$

Da Ψ analytisch ist, gilt

$$\Psi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_r r^k.$$

und der Konvergenzradius ist $+\infty$. Sei dann (für $N \in \mathbb{N}$)

$$\Psi_N(r) := \sum_{k=0}^{N} a_r r^k.$$

Da der Konvergenzradius $+\infty$ ist, $\Psi_N \to \Psi$ gleichmäßig auf kompakten Mengen. Sei jetzt

$$\Phi_N(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \Psi_N\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).$$

Die Konvergenz $\Psi_N \to \Psi$ impliziert die Konvergenz $\Phi_N(\cdot,t) \to \Phi(\cdot,t)$ mit $N\to\infty$, für feste Zeit $t>0$. Außerdem, ist $\Phi_N(t)$ ein Polynom, und dann auch $\Phi_N(t)\star g$, dank der ersten Bemerkung. Wir haben dann (N und $\bar t$ sollen noch festgelegt werden):

$$\left\|\Phi_N(\bar t)\star g-f\right\|_{L^\infty([a,b])} \le \left\|\Phi_N(\bar t)\star g-\Phi(\bar t)\star g\right\|_{L^\infty([a,b])}+\left\|\Phi(\bar t)\star g-g\right\|_{L^\infty([a,b])}.$$

Sei $\varepsilon>0$. Sei $\bar t$ so klein, dass $\|\Phi(\bar t)\star g-g\|_{L^\infty([a,b])}\le\varepsilon$ ($\bar t$ existiert, dank Satz 57 aus der Vorlesung). Für diese feste Zeit $\bar t$, sei N so groß, dass $\left\|\Phi_N(\bar t)\star g-\Phi(\bar t)\star g\right\|_{L^\infty([a,b])}\le\varepsilon$ (diese N existiert, dank der zweiten Bemerkung). Wir haben dann

$$\left\|\Phi_N(\bar t)\star g-f\right\|_{L^\infty([a,b])}\le 2\varepsilon.$$

In anderen Wörtern, für alle $\varepsilon>0$, haben wir ein Polynom gefunden ($\Phi_N(\bar t)\star g$) so, dass $\left\|\Phi_N(\bar t)\star g-f\right\|_{L^\infty([a,b])}\le 2\varepsilon$. Das endet den Beweis.

Aufgabe 39. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung in $(-\pi,\pi)$ mit periodischen Randwerten:

$$\begin{aligned}\partial_t u-\partial_x^2 u &= 0 \quad \text{in } (-\pi,\pi)\times(0,\infty)\\ u(-\pi,t) &= u(\pi,t) \quad \text{für } t\ge 0\\ u(x,0) &= f(x) \text{ für } x\in[-\pi,\pi],\end{aligned}$$

wobei $f\in C(\mathbb{R})$ periodisch ist, d.h. $f(x)=f(x+2\pi)$.

(i) Sei $u\in C_1^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ eine periodische Lösung, d.h. $u(x+2\pi,t)=u(x,t)$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx-k^2t}$$

für Koeffizienten $a_k\in\mathbb{C}$, und schreiben Sie u in Form einer Faltung als $u(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}K(x-y,t)f(y)dy$.

(ii) Sei

$$\Psi(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Phi(x+2\pi k,t) \qquad \text{für } x\in[-\pi,\pi] \text{ und } t>0,$$

wobei Φ der Wärmeleitungskern in $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass $x\mapsto\Psi(x,t)$ zu $C^1(\mathbb{R})$ gehört und $2\pi-$periodisch ist für alle $t>0$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $\Psi(x,t)$ und folgern Sie, dass $\Psi(x,t)=K(x,t)$.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $t>0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)dx=1 \text{ und } K(x,t)\ge 0.$$

(iv) Beweisen Sie, dass die Formel in (i) tatsächlich für jede $2\pi-$periodische Funktion $f\in C[-\pi,\pi]$ die Lösung des Anfangswertproblems ist (d.h. $u(x,t)\to f(x)$ mit $t\to 0$).

Hinweis: in (iv) schreiben Sie $K(x,t)=\Phi(x,t)+\mathcal{E}(x,t)$ mit $|\mathcal{E}(x,t)|\le Ct^{-1/2}e^{-c/t}$ für $x\in[-\pi,\pi]$ und verwenden Sie den Beweis von Satz 57.

Lösung. Es fehlte noch Punkt (iv) zu diskutieren. Wir definieren

$$\mathcal{E}(x,t) := \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x+2\pi k|^2/(4t)}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Beweisen wir zunächst, dass $|\mathcal{E}(x,t)| \leq C t^{-1/2} e^{-c/t}$, für geeignet gewählte Konstanten $C, c > 0$. Wir haben

$$\mathcal{E}(x,t) := \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x+2\pi k|^2/(4t)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-c/t} \sum_{k\neq 0} e^{|x+2\pi k|^2(c-1/4)/t},$$

so dass, wenn wir z.B. $c = 1/8$ wählen, erhalten wir

$$\mathcal{E}(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-1/8t} \sum_{k\neq 0} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)}, \tag{j}$$

Wir wollen dann beweisen, dass eine Konstante $C > 0$ existiert (unabhänghig von t, x), so dass

$$\sum_{k\neq 0} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} \leq C.$$

Wir haben

$$\sum_{k\neq 0} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} + \sum_{k=-1}^{-\infty} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)}.$$

Für festen $x \in [-\pi, \pi]$ und für $k \geq 1$, haben wir

$$e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} \leq e^{-|y|^2/(8t)} \text{ für alle } y \in [x + 2(k-1)\pi, x + 2k\pi]$$

und dann auch (durch Integration in dy)

$$2\pi e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} \leq \int_{x+2(k-1)\pi}^{x+2k\pi} e^{-|y|^2/(8t)} dy$$

Deswegen für die Summe in $k = 1, 2, \ldots$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{x+2(k-1)\pi}^{x+2k\pi} e^{-|y|^2/(8t)} dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|^2/(8t)} dy.
\end{aligned}$$

Ganz ähnlich,

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|^2/(8t)} dy.$$

Deshalb

$$\sum_{k\neq 0} e^{-|x+2\pi k|^2/(8t)} \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|^2/(8t)}dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|^2}dy = \sqrt{\pi}.$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, falls $t \leq 1$ (und das ist genug für uns, da wir den Limes $t \to 0$ betrachten wollen). Deswegen, dank (j),

$$\mathcal{E}(x,t) \leq \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-1/(8t)}.$$

Aus dem letzen Formel folgern wir, dass $\mathcal{E}(x,t) \to 0$ mit $t \to 0$, gleichmäßig in x. Deshalb

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{+\pi} K(y,t)f(x-y)dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\pi}^{+\pi} K(y,t)\big[f(x-y) - f(x)\big]dy \right| \\
&= \left| \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(y,t)\big[f(x-y) - f(x)\big]dy + \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{E}(y,t)\big[f(x-y) - f(x)\big]dy \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(y,t)\big|f(x-y) - f(x)\big|dy + \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{E}(y,t)|f(x-y) - f(x)|dy \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y,t)\big|f(x-y) - f(x)\big|dy + \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{E}(y,t)|f(x-y) - f(x)|dy.
\end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert gegen 0, dank Satz 57 aus der Vorlesung. Für den zweiten Term können wir die folgenden Abschätzung machen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{E}(y,t)|f(x-y) - f(x)|dy \leq 4\pi\|f\|_{L^\infty} \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-1/(8t)},$$

und der letzte Term konvergiert gegen 0 mit $t \to 0$.