Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 10

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 03.01.2018, 10:45 Uhr im Hörsaal 6 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Für beliebige $a, b \in M$ sei $a \boxplus b = k$ wobei k der Rest ist, den $(a + b)$ bei der Division durch 4 lässt. Für beliebige $a, b \in M$ sei $a \boxdot b = l$ wobei l der Rest ist, den $(a \cdot b)$ bei der Division durch 4 lässt.

a) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für die Verknüpfungen $\boxplus$ und $\boxdot$ auf. Begründen Sie mit Hilfe dieser Tafeln, dass beide Verknüpfungen innere Verknüpfungen sind. (3P)

b) Begründen Sie, dass $(M, \boxplus, \boxdot)$ kein Körper ist. (2P)

Aufgabe 2

Gegeben sei die Menge A mit $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Durch

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid a \cdot d = b \cdot c\}$$

ist auf A eine Äquivalenzrelation festgelegt (vgl. Satz 7.1). Die durch diese Relation gebildeten Äquivalenzklassen bilden die Menge $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{[(a, b)]_R \mid a \in \mathbb{Z}, b \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}.$$

Durch $[(a, b)]_R \odot [(c, d)]_R = [(ac, bd)]_R$ ist eine Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ definiert.
Durch $[(a, b)]_R \oplus [(c, d)]_R = [(ad + bc, bd)]_R$ ist eine Addition auf $\mathbb{Q}$ definiert (vgl. Definition 7.3).

Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ das Distributivgesetz gilt. (3P)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Abbildung $\varphi : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ (n, m) \mapsto 2^{(n-1)} \cdot (2m - 1)$.

a) Geben Sie $\varphi((3, 1))$ und $\varphi((4, 5))$ an. Bestimmen Sie $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ so dass $\varphi((n, m)) = 47$ ist. Bestimmen Sie $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ so dass $\varphi((n, m)) = 100$ ist. (6P)

b) Begründen Sie, dass φ eine bijektive Abbildung ist. (6P)