11. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 18.12.2017

41.) Führen Sie für die Polynom-Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $P(x) := x^3 - 4x^2 - 3x$ eine Kurvendiskussion durch – mit Angabe der Nullstellen sowie der Auflistung von Hoch - , Tief - und Wendepunkten.
Fertigen Sie auch eine Skizze im Intervall $[-2, 5]$ an.

42.) Berechnen Sie mittels der *L'Hospital'schen Regel* die folgenden Grenzwerte:

i) $lim_{x\to 0} \frac{sin(a\cdot x)}{sin(b\cdot x)}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$;

ii) $lim_{x\to 1} \frac{sin(2\pi\cdot x)}{ln(x)}$;

iii) $lim_{x\to 0} \frac{sin^2(x)}{exp(x)-x-1}$.

43i) Definiere $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := ln(1 + x).$$

Berechnen Sie $f^{(n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in]-1, 1[$, und stellen Sie – durch weitere Rechnung – für jedes $n \in \mathbb{N}$ das $n - te$ Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

ii) Zeigen Sie für alle $x \in]-1, 1[$:

$$ln(1 + x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \text{ und damit auch } ln(1 - x) \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Verifizieren Sie diese Reihenentwicklungen – mittels i) und Satz 4.16 – zunächst für alle $x \in [-\frac{1}{2}, 1[$ bzw. alle $x \in]-1, \frac{1}{2}]$, und wenden Sie dann wiederholt die folgende Formel an:

$$ln(1 + x) = ln(1 - x^2) - ln(1 - x) \text{ für alle } x \in]-1, 1[.$$

iii) Folgern Sie mittels ii), dass für alle $x \in]-1, 1[$ gilt:

$$ln(\tfrac{1+x}{1-x}) \;=\; 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} .$$

iv) Folgern Sie schließlich, dass *für alle* $u \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$ln(u) \;=\; 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \cdot (\tfrac{u-1}{u+1})^{2m-1}.$$

Lösen Sie dazu die Gleichung $\frac{1+x}{1-x} = u$ nach x auf.

v) Berechnen Sie $ln(2)$ mittels iv) – bis auf 6 Stellen hinter dem Komma.

44.) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen konvex bzw. konkav sind:

i) $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_1(x) := ln(x)$.

ii) $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_2(x) := \sqrt{1 - x^2}$.

iii) $f_3 :\; [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_3(x) := tan(x)$.

iv) $f_4 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_4(x) := tan(x)$.