Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 9

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 13.12.2017, 10:45 Uhr im Hörsaal 6 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden inneren Verknüpfungen auf Assoziativität, Kommutativität und Existenz von neutralen Elementen.

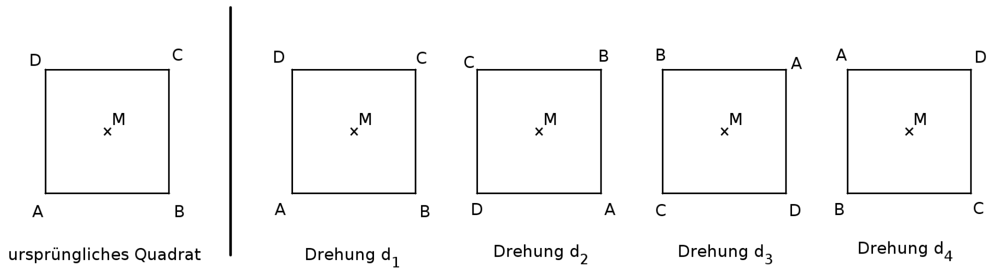
a) $\circ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a^b$ (3P)

b) $\star : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a + b + ab$ (3P)

Nutzen Sie aus der Schule bekannte Rechenregeln.

Aufgabe 2

Ein Quadrat kann durch vier verschiedene Drehungen um seinen Mittelpunkt auf sich selbst abgebildet werden (siehe Abbildung).



Die Menge G besteht aus den vier dargestellten Drehungen eines Quadrats um seinen Mittelpunkt:

$$G = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}.$$

Die Operation $\circ$ ist die Hintereinanderausführung zweier Drehungen, d.h. wenn Q ein beliebiges Quadrat ist, dann gilt: $(d_i \circ d_j)(Q) = d_i(d_j(Q))$ mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dies bedeutet, dass erst die Drehung d_j auf das ursprüngliche Quadrat Q angewendet wird und anschließend auf das dadurch entstandene Quadrat die Drehung d_i angewendet wird.

a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel von $\circ$ auf. Begründen Sie mit Hilfe der Verknüpfungstafel, dass die Operation $\circ$ eine innere Verknüpfung in G ist. (2P)

b) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist. (4P)

bitte wenden

Aufgabe 3

Es sei $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine sechselementige Menge mit einer inneren Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$. Vervollständigen Sie die untenstehende Verknüpfungstafel unter der Annahme, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist. (2P)

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a					c	b
b		d	f			
c		e				
d				d		
e						
f		a			d	

Hinweis: Im Gegensatz zur Bezeichnung in der Vorlesung muss e nicht unbedingt das neutrale Element sein. Nutzen Sie alle Gruppeneigenschaften, um die Verknüpfungstafel zu füllen, ohne zu raten.

Aufgabe 4

Die Menge

$$M_1 = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ist mit der üblichen Multiplikation und Addition und den aus der Schule bekannten Rechenregeln einen Körper (vgl. Vorlesung). Es sei $k \in M_1$ mit $k = 2 - 3 \cdot \sqrt{5}$.

a) Geben Sie das inverse Element von k bezüglich der Addition an. (1P)

b) Bestimmen Sie das inverse Element k^{-1} von k bezüglich der Multiplikation. Stellen Sie k^{-1} in der Form $k^{-1} = a + b \cdot \sqrt{5}$ dar. (2P)

Nun wird die Menge

$$M_2 = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

betrachtet.

c) Zeigen Sie, dass die übliche Mutiplikation in der Menge M_2 keine innere Verknüpfung ist. Geben Sie eine Menge M_3 mit den folgenden beiden Eigenschaften an:

- $M_2 \subset M_3 \subset \mathbb{R}$.
- Die übliche Multiplikation ist in der Menge M_3 eine innere Verknüpfung.

Zeigen Sie, dass die übliche Multiplikation in der Menge M_3 in der Tat eine innere Verknüpfung ist. (4P)