Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

**Partielle Differentialgleichungen I**
Blatt 4
Lösungen bitte zur Übung am 3. November 2017 mitbringen

**Aufgabe 13.** Sei $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und es gelte die Mittelwertungleichung

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und für alle } r > 0.$$

Zeigen Sie, dass $-\Delta u \leq 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(-\Delta\varphi)(x)dx \leq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi \geq 0.$$

*Hinweis:* Untersuchen Sie zuerst den Spezialfall $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Im allgemeinen Fall betrachten Sie die Regularisierung $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon \star u$ mit $\varepsilon \to 0$.

**Aufgabe 14.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und für $x \in U$ sei $\phi^x \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ so dass

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x(y) &= 0 \text{ in } U, \\ \phi^x(y) &= \Phi(x-y) \text{ auf } \partial U, \end{aligned}$$

wobei $\Phi$ das Newton'sche Potential ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$(x, y) \mapsto \phi^x(y)$$

stetig ist auf $U \times U$.

**Aufgabe 15.** Sei $u \in C^3(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ und $\Delta u = 0$ in $B(0,1)$, und sei $\eta \in C_c^\infty(B(0,1))$ mit $\eta(0) = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $\lambda > 0$, unabhängig von $u$, geeignet gewählt werden kann, so dass die Funktion $w := \eta^2|Du|^2 + \lambda|u|^2$

$$\Delta w \geq 0 \text{ in } B(0,1)$$

erfüllt.

(ii) Folgern Sie daraus die Abschätzung

$$|Du(0)|^2 \leq \lambda \max_{\partial B(0,1)} |u|^2.$$

**Aufgabe 16.** Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ zwei Multiindizes, wobei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sei $q \in [0, 1)$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} q^{|\alpha - \beta|} = \frac{\beta!}{(1 - q)^{|\beta| + n}}.$$

*Hinweis:* Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, sind

$$\begin{aligned} \alpha! &:= \alpha_1! \; \alpha_2! \cdots \alpha_n!, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n. \end{aligned}$$