ÜA Funktionalanalysis 1 - 2. Serie

1. (mündlich)

   Zeigen Sie die Vollständigkeit eines der drei folgenden normierten Räume.

   (a) Raum c_0 aller Nullfolgen mit der sup-Norm

   (b) Raum c der konvergenten Folgen mit der sup-Norm

   (c) Raum $C^m[0,1]$ der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit der Norm $\|f\| = \max\limits_{0\leq k\leq m} \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f^{(k)}(t)|$

2. (mündlich)

   Sei (X,d) ein diskreter metrischer Raum (vgl. Aufgabe 1 der 1. Serie). Man charakterisiere

   beschränkte / vollständige / präkompakte Teilmengen in X.

3. (schriftlich)

   Man entscheide, ob die folgenden Teilmengen des normierten Raumes $(\ell_\infty, \|\,.\,\|_\infty)$ überdeckungskompakt / präkompakt sind.
   (Beweis oder Gegenbeispiel angeben!)

   $A = \{(x_n) \in \ell_\infty : |x_n| \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

   $B = \{(x_n) \in \ell_\infty : |x_n| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

   $C = \{(x_n) \in \ell_\infty : |x_n| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

4. (schriftlich)

   Sei K eine folgenkompakte Teilmenge eines beliebigen metrischen Raumes (X,d). Beweisen Sie: Jede stetige Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Infimum und ihr Supremum auf K an.

Abgabe vor der Vorlesung am Dienstag, dem 24.10.2017