Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 13. 11. 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis für Informatiker

Blatt 6

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903-1957)

Aufgabe 1. (*Konvergenz, schriftlich,* 3 *Punkte*)

Sei $a \in (0, \infty)$. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

gilt.
(Hinweis: Für $a > 1$ definiere man für $n \in \mathbb{N}$

$$x_n := \sqrt[n]{a} - 1.$$

Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung auf x_n an, und zeigen Sie damit, dass $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge bildet. Den Fall $0 < a < 1$ können Sie dann auf den schon bewiesenen Fall zurückführen.)

Aufgabe 2. (*Häufungspunkte, Limes Superior und Limes Inferior, a)-c) schriftlich,* 6 *Punkte*)

Bestimmen Sie (mit Begründung) alle Häufungspunkte, den Limes Superior und den Limes Inferior von folgenden Folgen.

a) $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $b_n = (1 + (-1)^n)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

d) $(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots)$.

Aufgabe 3. (*Limes Superior und Limes Inferior, mündlich*)

Seien $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ zwei beschränkte Folgen. Beweisen Sie die sogenannte Summenregel

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Kann man $\liminf\limits_{n\to\infty}$ durch $\limsup\limits_{n\to\infty}$ ersetzen?

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (*Bestimmte Divergenz, schriftlich,* 2 *Punkte*)
Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eine bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$. Beweisen Sie, dass dann $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 5. (*Bestimmte Divergenz, mündlich*)

Finden Sie jeweils Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so dass nachfolgende Eigenschaften erfüllt sind.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$ für eine beliebig vorgegebene reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$.

d) Die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 20. 11. 2017 abzugeben.