Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 3 - Abgabetermin 30.10.2017

3-A. Seien M und N Mengen. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) $M \setminus M = \emptyset$.

(b) $M \setminus \emptyset = M$.

(c) $M \setminus N \subseteq M$.

(d) $M \cap N = M \setminus (M \setminus N)$.

(e) Falls P eine Menge ist, welche $P \subseteq N$ erfüllt, so gelten $M \setminus N \subseteq M \setminus P$ und $P \setminus M \subseteq N \setminus M$.

3-B. (a) Seien M, N und P Mengen. Weisen Sie die Gültigkeit der Identitäten

$$\begin{aligned} P \times (M \cap N) &= (P \times M) \cap (P \times N), \\ P \times (M \cup N) &= (P \times M) \cup (P \times N) \end{aligned}$$

und

$$P \times (M \setminus N) = (P \times M) \setminus (P \times N)$$

nach.

(b) Bestimmen Sie für $M := \{1; 2; 3\}, N := \{1; 4\}$ und $P := \{1; 2\}$ die Mengen $(M \cap N) \times P$, $[N \cap (P \cup N)] \times [(M \setminus N) \cup (N \setminus M)] \times [(P \setminus N) \cap M]$ und $\mathfrak{P}(N \times P)$.

3-C. Sei M eine nichtleere Menge. Eine bijektive Abbildung $\varphi : M \to M$ nennt man auch eine *Permutation von* M. Ist M eine endliche Menge, etwa $M = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, so wird die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \varphi(\xi_1) & \varphi(\xi_2) & \ldots & \varphi(\xi_n) \end{pmatrix}$$

für jene Permutation φ von M benutzt, welche für jedes $j \in \mathbb{Z}_{1,n}$ dem Element ξ_j aus M das Element $\varphi(\xi_j)$ aus M zugeordnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Permutationen von $\{1; 2; 3; 4\}$ bezüglich der Hintereinanderausführung eine nichtkommutative Gruppe der Ordnung 24 bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge G aller Permutationen einer endlichen Menge $M = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ bezüglich der Hintereinanderausführung als Verknüpfung der Elemente aus G eine endliche Gruppe bildet und bestimmen Sie die Ordnung dieser Gruppe. Bestimmen Sie die Menge all derjenigen $n \in \mathbb{N}$, für die diese Gruppe abelsch ist.

3-D. Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit genau vier Elementen und untersuchen Sie, welche davon abelsch sind.

3-Z. (a) Seien M, N und P Mengen. Begründen Sie, dass aus $N \subseteq P$ die Beziehung $M \times N \subseteq M \times P$ folgt.

(b) Bestimmen Sie für $P := [0, 1], M := \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 2x\}$ und $N := P \setminus M$ die Mengen $M \times P, P \times (M \cup N), (M \cap N) \times P$ und $\mathfrak{P}(M \times M)$.