Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 4. November 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen

Blatt 5

Aufgabe 1 (3 Punkte). Finde alle maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) y + x + e^x \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Gib ein Fundamentalsystem für das Differenzialgleichungssystem $y' = Dy$ an.

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige und $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeige, dass $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Differenzialgleichungssystems $y' = Ay$ ist, genau dann wenn $z(x) := Ty(x)$ eine Lösung des Differenzialgleichungssystems $y' = TAT^{-1}y$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann auch $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Seien $\lambda = \lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i$ und $v = v_r + \mathrm{i}v_i$ die Zerlegungen in Real- und Imaginärteil (also $\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_r, v_i \in \mathbb{R}^n$). Zeige, dass die komplexenwertigen Funktionen $e^{\lambda x}v$ und $e^{\overline{\lambda}x}\overline{v}$ sowie die reellwertigen Funktionen

$$e^{\lambda_r x}(v_r \cos(\lambda_i x) - v_i \sin(\lambda_i x)) \text{ und } e^{\lambda_r x}(v_r \sin(\lambda_i x) + v_i \cos(\lambda_i x))$$

den selben Unterraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ aufspannen.

Hinweis: Die komplexe Konjugation $\overline{v}$ für $v \in \mathbb{C}^n$ ist komponentenweise zu verstehen.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix die die Gleichungen

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Für welche Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für $x \to \infty$?

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 14.11.2017 abzugeben.