

Partielle Differentialgleichungen I

WS 2017/18

Prof. Dr. László Székelyhidi

31. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Beispiele	2
2	Die Poissonsgleichung und Harmonische Funktionen	3
2.1	Green'sche Formeln	3
2.2	Lösung im Ganzraum	3
2.3	Mathematische Interpretation der Fundamentallösung	3
2.4	Mittelwerteigenschaft	4
2.5	Maximumprinzip, Eindeutigkeit, Harnack'sche Ungleichung	5
2.6	Regularität	6
2.7	Analytizität	7
2.8	Verhalten bei ∞	8
2.9	Die Cauchy-Riemann Gleichungen	9
2.10	Die Poisson'sche Darstellungsformel	9
2.11	Die Green'sche Funktion	11
2.12	Die Perron'sche Methode	12
2.13	Das Dirichlet'sche Variationsprinzip	13
3	Die Wärmeleitungsgleichung	14
3.1	Lösung im Ganzraum	14
3.2	Das Maximumprinzip	15
3.3	Regularität	16
3.4	Fouriertransformation	17
3.5	Energiemethoden	18
4	Die Wellengleichung	18
4.1	Die d'Alembert'sche Formel	18
4.2	Wellengleichung in 2D und 3D	19
4.3	Schwingungen	20
4.4	Inhomogene Wellengleichung	20
4.5	Energiemethode	21

5	Quasilineare PDG erster Ordnung	22
5.1	Methode der Charakteristiken	22
5.2	Das Cauchyproblem	22
5.3	Allgemeine quasilineare PDG	23
5.4	Singularitäten	24
6	Zusammenfassung	24

1 Einführung

1.1 Beispiele

A. Linearer Transport

Transport eines Stoffes mit Konzentration $u(x, t)$ in einer Strömung mit Geschwindigkeit $b(x, t)$:

$$\partial_t u + b(x, t) \cdot \nabla u = 0. \quad (1)$$

B. Schwingende Saite

Auslenkung $u(x, t)$ einer an beiden Enden eingespannten Saite mit Spannkraft T und konstanter Dichte ρ :

$$\partial_t^2 u = \frac{T}{\rho} \partial_x^2 u. \quad (2)$$

C. Elastisches Membran/Körper

$$\partial_t^2 u = \frac{T}{\rho} \Delta u. \quad (3)$$

D. Diffusion

Diffusion eines Stoffes mit Konzentration $u(x, t)$ in einem Medium mit Diffusivität $a > 0$:

$$\partial_t u = a \Delta u. \quad (4)$$

E. Wärmeleitung

Verteilung der Temperatur $u(x, t)$ in einem Medium mit Wärmeleitfähigkeit $a > 0$:

$$\partial_t u = a \Delta u. \quad (5)$$

F. Black-Scholes Gleichung

Wert einer Europäischen Option $V(S, t)$ mit Basiswert S zum Zeitpunkt t , bei einem risikofreien Zinssatz $r \geq 0$ und Volatilität $\sigma > 0$:

$$\partial_t V + rS \partial_S V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S^2 V = rV. \quad (6)$$

G. Strömungspotential

Strömungspotential einer stationären, wirbelfreien, inkompressiblen Flüssigkeit ohne Reibung:

$$\Delta \phi = 0. \quad (7)$$

Die Geschwindigkeit ist gegeben durch $u = \nabla \phi$.

2 Die Poissongleichung und Harmonische Funktionen

2.1 Green'sche Formeln

Proposition 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1 Rand und äusserem Normalvektor ν . Seien $u, v \in C^2(\overline{U})$. Dann gilt

- (i) $\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu}$
- (ii) $\int_U \nabla u \cdot \nabla v = - \int_U v \Delta u + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v$
- (iii) $\int_U u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}$

2.2 Lösung im Ganzraum

Definition 2. Das Newton'sche Potential ist die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3, \end{cases} \quad (8)$$

wobei $\alpha(n) = \text{Vol}(B_1(0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$.

Proposition 3. Für alle $\epsilon > 0$

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = -1 \quad (9)$$

Satz 4. Sei $n \geq 2$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy. \quad (10)$$

Dann $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

2.3 Mathematische Interpretation der Fundamentallösung

Definition 5. Sei $\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Eine Folge f_k konvergiert in $\mathcal{D}$ gegen f ($f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} f$) falls

- (i) $D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f$ gleichmässig in $\mathbb{R}^n$ für alle α Multiindex,
- (ii) Es existiert ein $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so dass $f_k = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus K$ für alle k .

Definition 6. Eine Distribution T ist eine lineare und stetige Abbildung $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h.

1. aus $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ folgt $T(f_k) \rightarrow T(f)$,
2. $T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{D}$.

NOTATION für die Menge der Distributionen: $\mathcal{D}'$

Definition 7. Sei $T \in \mathcal{D}'$. Dann

$$(D^\alpha T)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) \quad (11)$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}$.

Proposition 8. Sei Φ das Newton'sche Potential. Dann

$$-\Delta \Phi = \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}' \quad (12)$$

2.4 Mittelwerteigenschaft

NOTATION:

$$\oint_{B_r(x)} u = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad (13)$$

$$\oint_{\partial B_r(x)} u = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) \quad (14)$$

Definition 9. Eine Funktion $u \in C^2(U)$ heißt

- *harmonisch* falls $\Delta u = 0$ in U ,
- *subharmonisch* falls $-\Delta u \leq 0$ in U ,
- *superharmonisch* falls $-\Delta u \geq 0$ in U .

Satz 10 (MWE). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(U)$ und $B_r(x) \subset U$.

(i) Falls $\Delta u = 0$ in U , so gilt

$$u(x) = \oint_{\partial B_r(x)} u = \oint_{B_r(x)} u. \quad (15)$$

(ii) Falls $-\Delta u \leq 0$ in U , so gilt

$$u(x) \leq \oint_{\partial B_r(x)} u \quad (16)$$

$$u(x) \leq \oint_{B_r(x)} u \quad (17)$$

Lemma 11. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(U)$. Folgende sind äquivalent:

- (i) $u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u$ für alle $B_r(x) \subset U$,
- (ii) $u(x) = \int_{B_r(x)} u$ für alle $B_r(x) \subset U$.

Satz 12. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(U)$. Falls

$$\int_{\partial B_r(x)} u = u(x) \quad \text{für alle } B_r(x) \subset U, \quad (18)$$

dann gilt $\Delta u = 0$.

2.5 Maximumprinzip, Eindeutigkeit, Harnack'sche Ungleichung

Satz 13 (schwaches Maximumprinzip). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ und $-\Delta u \leq 0$ in U . Dann gilt

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u. \quad (19)$$

Satz 14 (starkes Maximumprinzip). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ und $-\Delta u \leq 0$ in U . Dann gilt entweder

- (i) $u(x) < \max_{\partial U} u$ für alle $x \in U$,
- oder
- (ii) $u = \text{const. in } U$.

Korollar 15. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Es gibt höchstens eine Funktion $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ mit

$$-\Delta u = f \text{ in } U \quad (20)$$

$$u = g \text{ auf } \partial U. \quad (21)$$

Satz 16 (Harnack'sche Ungleichung). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset\subset U$ offen und zusammenhängend. Es gibt eine Konstante $c = c(U, V)$ so dass

$$\sup_V u \leq c \inf_U u \quad (22)$$

für alle $u \in C^2(U)$ mit $\Delta u = 0$ und $u \geq 0$.

Satz 17 (Hopf'sches Maximumprinzip). Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ harmonisch in $B_R(0)$ und $x_0 \in \partial B_R(0)$ ein striktes Maximum von u , d.h. $u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in B_R(0)$. Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq \frac{C(n)}{R}(u(x_0) - u(0)).$$

2.6 Regularität

Lemma 18. Es existiert eine radialsymmetrische Funktion $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $\eta \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$.

NOTATION: für $\epsilon > 0$ heißt die Familie

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

ein glättender Kern.

Lemma 19 (Regularisierung). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $U_\epsilon = \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$. Sei $f \in L_{loc}^1(U)$ und

$$f_\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y) dy \quad \text{für } x \in U_\epsilon. \quad (23)$$

Dann gilt

- (i) $f_\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$,
- (ii) Falls $f \in C(U)$, dann $f_\epsilon \rightarrow f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U ,
- (iii) $f_\epsilon \rightarrow f$ in $L_{loc}^1(U)$.
- (iv) $f_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ für fast alle $x \in U$.

Satz 20. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(U)$ mit der Mittelwerteigenschaft. Dann ist $u \in C^\infty(U)$.

Korollar 21 (Harnack'scher Konvergenzsatz). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei u_k eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen. Falls es ein $y \in U$ gibt, für welches die Folge $\{u_k(y)\}$ beschränkt ist, so konvergiert u_k auf jede zusammenhängende offene Teilmenge $V \subset\subset U$ gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion.

Satz 22 (Quantitative Abschätzungen). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und u harmonisch in U . Dann gilt

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u| \quad (24)$$

für alle $B_r(x) \subset U$ und alle Multiindices α mit $|\alpha| = k$.

Dabei gilt

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)} \quad \text{für } k \geq 1. \quad (25)$$

2.7 Analytizität

NOTATION: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ein Multiindex ist ein Element $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit Ordnung $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Die α -Ableitung einer Funktion ist

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ und $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Mit der üblichen Definition der Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$$

gelten die üblichen Formeln (für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $u, v \in C^\infty$):

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha - \beta} \quad (\text{Binomialformel})$$

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha - \beta} v \quad (\text{Leibnizformel})$$

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(0) x^\alpha + R_k, \quad (\text{Taylorformel})$$

wobei bei letzterem

$$R_k = \sum_{|\alpha| = k+1} (k+1) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k D^\alpha u(tx) dt.$$

Definition 23. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) f heißt analytisch in $x_0 \in U$ falls $\exists r > 0$ und $f_\alpha \in \mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ so dass

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} f_\alpha (x - x_0)^\alpha \quad \text{für alle } x \in B_r(x_0),$$

wobei die Summe absolut konvergiert.

(ii) f heißt analytisch in U falls f in jedem Punkt $x \in U$ analytisch ist. Wir schreiben dann $f \in C^\omega(U)$.

Satz 24. $f \in C^\omega$ genau dann, wenn

- (i) $f \in C^\infty(U)$,
- (ii) für alle kompakten Teilmengen $K \subset U$ existiert $M, r > 0$ so dass

$$|D^\alpha f(x)| \leq M |\alpha|! r^{-|\alpha|} \quad \text{für alle } x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Satz 25 (Analytische Fortsetzung). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $f \in C^\omega(U)$. Falls $x_0 \in U$ so dass $D^\alpha f(x_0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in U$.

Satz 26. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt $u \in C^\omega(U)$.

Korollar 27. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und u harmonisch in U . Falls $x_0 \in U$ so dass $D^\alpha u(x_0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dann ist $u(x) = 0$ für alle $x \in U$.

2.8 Verhalten bei ∞

Satz 28 (Liouville). Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.

Korollar 29. Sei $n \geq 3$ und $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Jede beschränkte Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \quad (26)$$

ist von der Form

$$u = \Phi \star f + c \quad (27)$$

wobei Φ das Newton'sche Potential und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Satz 30 (Multipolentwicklung). Sei $n \geq 3$, $f \in C_c^2(B_R(0))$ und u eine beschränkte Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n. \quad (28)$$

Dann gilt für alle $k = 0, 1, 2, \dots$ und für $|x| \geq 2R$

$$\left| u(x) - u_\infty - \sum_{|\alpha| \leq k} f_\alpha D^\alpha \Phi(x) \right| \leq C_k \frac{R^{k+1}}{|x|^{n+k-1}} \int_{B_R(0)} |f| dx \quad (29)$$

wobei $u_\infty \in \mathbb{R}$ und

$$f_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{B_R(0)} f(y) y^\alpha dy.$$

Korollar 31. Sei $n \geq 3$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))$ harmonisch und beschränkt. Dann existieren $u_\infty, f_\alpha \in \mathbb{R}$ und Konstante C_k so dass

$$\left| u(x) - u_\infty - \sum_{|\alpha| \leq k} f_\alpha D^\alpha \Phi(x) \right| \leq C_k \frac{R^{k+1}}{|x|^{n+k-1}}. \quad (30)$$

Lemma 32. Sei $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx. \quad (31)$$

Satz 33. Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $u = \Phi \star f$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx. \quad (32)$$

2.9 Die Cauchy-Riemann Gleichungen

Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Mit der Identifizierung $x + iy \simeq (x, y)$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ lässt sich f auch als Funktion $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ auffassen. Dann gilt

$$f(z + w) = f(z) + \partial f(z) \cdot w + \bar{\partial} f(z) \cdot \bar{w} + o(|w|), \quad (33)$$

wobei

Definition 34.

$$\partial = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y). \quad (34)$$

Satz 35. Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann ist f holomorph in U genau dann, wenn $\bar{\partial} f(z) = 0$ für alle $z \in U$.

Für $f = u + iv$ ist die (komplexe) Differentialgleichung $\bar{\partial} f = 0$ äquivalent zu dem (reellen) partiellen Differentialgleichungssystem (die Cauchy-Riemann Gleichungen)

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad (35)$$

Satz 36. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Falls $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f = u + iv$, dann sind u und v harmonisch in U . Umgekehrt, jede harmonische Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist *lokal* der Realteil einer holomorphen Funktion, d.h. für alle Kreisscheiben $D \subset U$ existiert eine holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ so dass $u = \Re f$ in D .

2.10 Die Poisson'sche Darstellungsformel

Motivation. Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ mit $z = re^{i\theta}$:

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u.$$

Das Dirichletproblem in der Kreisscheibe $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0, 1), \\ u = g & \text{auf } \partial B(0, 1), \end{cases} \quad (36)$$

Lösung mittels Trennung der Variablen (Ansatz $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$) führt zu der *formalen* Summe

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} g(e^{it}) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Satz 37 (Green'sche Darstellungsformel). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1 Rand und äusserem Normalvektor ν . Sei $u \in C^2(\overline{U})$ und Φ das Newton'sche Potential. Dann gilt

$$u(x) = \int_{\partial U} \left[\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right] dS(y) - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy \quad (38)$$

für alle $x \in U$.

Definition 38 (Poissonkern). Sei $n \geq 2$.

$$P(x, y) := \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n} \quad (39)$$

Lemma 39.

- (i) $\Delta_x P(x, y) = 0$ in $B_1(0)$ für alle $y \in \partial B_1(0)$;
- (ii) $P(x, y) > 0$ für alle $x \in B_1(0)$, $y \in \partial B_1(0)$;
- (iii) für alle $|x| < 1$

$$\int_{\partial B_1(0)} P(x, y) dS(y) = 1;$$

- (iv) für alle $z \in \partial B_1(0)$ und $\delta > 0$

$$\lim_{B_1(0) \ni x \rightarrow z} \int_{|y-z|>\delta} P(x, y) dS(y) = 0.$$

Satz 40. Sei $g \in C(\partial B_1(0))$ und

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial B_1(0)} g(y) P(x, y) dS(y) & \text{für } |x| < 1, \\ g(x) & \text{für } |x| = 1. \end{cases} \quad (40)$$

Dann $u \in C(\overline{B_1(0)})$ und u ist harmonisch in $B_1(0)$.

Korollar 41. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $g \in C(\partial B)$. Das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B, \\ u = g & \text{auf } \partial B, \end{cases} \quad (41)$$

besitzt eine eindeutige Lösung.

2.11 Die Green'sche Funktion

Definition 42. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1 Rand. Die Green'sche Funktion für Δ in U ist eine Funktion $G(x, y)$, definiert für $x \in U, y \in \bar{U}, x \neq y$, so dass für alle $x \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_y G(x, y) &= \delta_x \text{ in } \mathcal{D}'(U), \\ G(x, y) &= 0 \text{ für } y \in \partial U. \end{aligned} \quad (42)$$

Satz 43. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1 Rand und G die Green'sche Funktion. Sei $u \in C^2(\bar{U})$ die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (43)$$

Dann gilt

$$u(x) = - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) g(y) dS(y) + \int_U G(x, y) f(y) dy. \quad (44)$$

Satz 44. Für alle $x, y \in U$ mit $x \neq y$ gilt

$$G(x, y) = G(y, x). \quad (45)$$

Definition 45. Die Green'sche Funktion für die Einheitskugel $B_1(0)$ ist

$$G(x, y) = \begin{cases} \Phi(x - y) - \Phi\left(|x|\left(y - \frac{x}{|x|^2}\right)\right) & x \neq 0 \\ \Phi(y) - \Phi(e_1) & x = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Definition 46. Die Green'sche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ist

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \bar{x}), \quad (47)$$

wobei $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n)$.

Satz 47. Sei $g \in C(\partial\mathbb{R}_+^n)$ beschränkt und

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} g(y) K(x, y) dS(y) & \text{für } x_n > 0, \\ g(x) & \text{für } x_n = 0, \end{cases} \quad (48)$$

wobei

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}. \quad (49)$$

Dann $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ und u ist harmonisch in $\mathbb{R}_+^n$.

2.12 Die Perron'sche Methode

Definition 48. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C(U)$ heißt *subharmonisch* falls

$$u(x) \leq \oint_{\partial B_r(x)} u \quad \text{für alle } B(x, r) \subset U. \quad (50)$$

Die Funktion heißt *superharmonisch* falls $-u$ subharmonisch.

Lemma 49. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend.

- (i) Sei $u \in C(\overline{U})$ subharmonisch und $v \in C(\overline{U})$ superharmonisch so dass $u \leq v$ auf ∂U . Dann

$$u < v \text{ in } U \quad \text{oder} \quad u \equiv v \text{ in } U.$$

- (ii) Sei $u \in C(U)$ subharmonisch, $B \subset U$ eine Kugel und

$$v = \begin{cases} \int_{\partial B} P_B(x, y) u(y) dS(y) & \text{in } B, \\ u & \text{in } U \setminus B, \end{cases}$$

wobei P_B der Poissonkern für die Kugel B ist. Dann ist v subharmonisch in U .

- (iii) Falls $u_1, \dots, u_N \in C(U)$ subharmonisch sind, dann ist

$$u(x) := \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

auch subharmonisch.

Satz 50. Sei $g \in C(\partial U)$ und

$$S_g := \{v \in C(\overline{U}) \text{ subharmonisch} : v \leq g \text{ auf } \partial U\}.$$

Dann ist

$$u(x) := \sup_{v \in S_g} v(x)$$

harmonisch in U .

Definition 51. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \partial U$ ein Randpunkt. Eine Funktion $w \in C(\overline{U})$ heißt *Barriere* in x_0 für U wenn

- (i) $w(x_0) = 0$ und $w > 0$ in $\overline{U} \setminus \{x_0\}$;
- (ii) w ist superharmonisch in U .

Der Randpunkt x_0 heißt *regulär*, falls eine Barriere existiert.

Lemma 52. Sei $u = \sup_{v \in S_g} v$ wie im Satz 50. Ist $x_0 \in \partial U$ regulär, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0).$$

Satz 53. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } U \\ u &= g \text{ auf } \partial U \end{aligned}$$

ist genau dann lösbar für beliebige $g \in C(\partial U)$, wenn alle Randpunkte $x_0 \in \partial U$ regulär sind.

Lemma 54. Sei U offen, beschränkt, $x_0 \in \partial U$ und $r > 0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\overline{U} \cap \overline{B_r(y_0)} = \{x_0\}$$

d.h. U erfüllt eine *äussere Sphärenbedingung* in x_0 . Dann ist der Randpunkt x_0 regulär.

Satz 55. Sei U offen, beschränkt, $x_0 \in \partial U$ und $\alpha > 1, r > 0, e \in S^{n-1}$ so dass

$$\overline{U} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \min(r, \alpha(x - x_0) \cdot e) \right\} = \{x_0\}$$

d.h. U erfüllt eine *äussere Kegelbedingung* in x_0 . Dann ist der Randpunkt x_0 regulär.

2.13 Das Dirichlet'sche Variationsprinzip

Satz 56. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1 Rand. Sei $f \in C(U), g \in C^2(\partial U)$ und $u \in C^2(\overline{U})$ die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ in } U, \\ u &= g \text{ auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w],$$

wobei

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf \, dx$$

und

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{U}) : w = g \text{ auf } \partial U\}.$$

Umgekehrt, falls $u \in \mathcal{A}$ mit $I[u] \leq I[w]$ für alle $w \in \mathcal{A}$, dann löst u das Dirichletproblem.

3 Die Wärmeleitungsgleichung

3.1 Lösung im Ganzraum

Definition 57. Der Wärmeleitungskern ist die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases} \quad (51)$$

Lemma 58.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) \, dx = 1 \text{ für alle } t > 0.$$

Satz 59. Sei $g \in BC(\mathbb{R}^n)$, d.h. beschränkt und stetig auf $\mathbb{R}^n$, und

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) \, dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Dann gilt

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
- (ii) $\partial_t u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
- (iii) für alle $x^0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = g(x_0).$$

Satz 60. Sei $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C_c(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ und

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) \, dy \, ds.$$

Dann gilt

- (i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,

(ii) $\partial_t u - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,

(iii) für alle $x^0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = 0.$$

Korollar 61. Sei $g \in BC(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C_c(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Dann löst

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

3.2 Das Maximumprinzip

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $T > 0$. Sei $U_T := U \times (0, T]$ und der parabolischer Rand:

$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T.$$

Satz 62 (schwache Maximumprinzip). Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ mit $\partial_t u = \Delta u$. Dann

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Korollar 63 (Eindeutigkeit). Sei $g_1, g_2 \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(U_T)$. Falls $u_1, u_2 \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ mit

$$\begin{aligned} \partial_t u_i - \Delta u_i &= f \text{ in } U_T, \\ u_i &= g_i \text{ in } \Gamma_T, \end{aligned}$$

dann

$$\max_{\overline{U_T}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\Gamma_T} |g_1 - g_2|.$$

Satz 64 (Satz von Tychonov). Sei $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ so dass

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u &= g \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ für } t = 0, \end{aligned}$$

und es existieren Konstanten $a, A > 0$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$

$$u(x, t) \leq A e^{a|x|^2}.$$

Dann

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Korollar 65 (Eindeutigkeit für die Tychonov-Klasse). Sei $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ und $u_1, u_2 \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ mit

$$\begin{aligned}\partial_t u_i - \Delta u_i &= f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u_i &= g_i \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ für } t = 0.\end{aligned}$$

Falls es Konstanten $a, A > 0$ existieren, so dass u_1, u_2 die Bedingung

$$u_i(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

erfüllen, dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} |u_1 - u_2| \leq \max_{\mathbb{R}^n} |g_1 - g_2|.$$

3.3 Regularität

Lemma 66 (Green'sche Darstellungsformel). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1 Rand, $T > 0$ und $u \in C_1^2(\overline{U_T})$ eine Lösung von $\partial_t u = \Delta u$. Dann gilt

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_U \Phi(x - y, t) u(y, 0) dx + \\ &+ \int_0^t \int_{\partial U} \Phi(x - y, t - s) \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) - u(y, s) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - y, t - s) dS_y ds\end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in U_T$.

Korollar 67. Sei $u \in C_1^2(U_T)$ mit $\partial_t u = \Delta u$. Dann ist $u \in C^\infty(U_T)$.

Definition 68 (Parabolische Zylinder).

$$C(x, t; r) = \overline{B_r}(x) \times [t - r^2, t].$$

Satz 69 (Quantitative Abschätzungen). Sei $u \in C_1^2(U_T)$ mit $\partial_t u = \Delta u$. Dann gilt

$$|\partial_t^k D_x^\alpha u(x, t)| \leq \left(\frac{C_n(|\alpha| + 2k)}{r} \right)^{|\alpha| + 2k} \max_{C(x, t; r)} |u|$$

für alle $C(x, t; r) \subset U_T$, für alle $k = 0, 1, 2, \dots$ und α Multiindex.

Korollar 70. Sei $u \in C_1^2(U_T)$ mit $\partial_t u = \Delta u$. Dann ist $x \mapsto u(x, t)$ analytisch in U für alle $(0, T]$.

3.4 Fouriertransformation

Definition 71. Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformation von f ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Definition 72 (Schwartz-Klasse).

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{für alle } \alpha, \beta \text{ gilt } \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \right\}.$$

Lemma 73 (Elementare Eigenschaften der Fouriertransformation). Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\hat{f}(\xi)$:

1. $f(x+y) \longrightarrow \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot y};$
2. $f(x) e^{-ix \cdot \eta} \longrightarrow \hat{f}(\xi + \eta);$
3. $f(\lambda x) \longrightarrow \lambda^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right);$
4. $D^\alpha f(x) \longrightarrow (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi);$
5. $(-ix)^\alpha f(x) \longrightarrow D^\alpha \hat{f}(\xi);$
6. $f(Rx) \longrightarrow \hat{f}(R\xi)$ für $R \in SO(n)$.

Korollar 74.

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Lemma 75.

$$f(x) = e^{-|x|^2} \implies \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2^{n/2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}.$$

Satz 76 (Rücktransformation). Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Lemma 77 (Faltungsformel). Sei $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann $f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\widehat{f \star g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

3.5 Energiemethoden

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1 -Rand, und $T > 0$.

Lemma 78 (Interne Energie). Sei $u \in C_1^2(\overline{U_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$, so dass $u = 0$ auf $\partial U \times [0, T]$. Dann ist

$$t \mapsto \int_U |u(x, t)|^2 dx$$

monoton fallend.

Satz 79 (Eindeutigkeit in der Vergangenheit). Seien $u_1, u_2 \in C_1^2(\overline{U_T})$ zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$, so dass $u_1 = u_2$ auf $\partial U \times [0, T]$. Dann

$$u_1(x, T) = u_2(x, T) \quad \forall x \in U \quad \Rightarrow \quad u_1 \equiv u_2 \text{ in } U_T.$$

Lemma 80 (Poincaré Ungleichung). Es existiert eine Konstante $C = C(U)$ so dass für alle $u \in C^1(\overline{U})$ mit $u = 0$ auf ∂U

$$\int_U u^2 dx \leq C \int_U |\nabla u|^2 dx.$$

Satz 81 (Langzeitlimes). Sei $g \in C(\partial U)$ und $u \in C_1^2(\overline{U} \times [0, \infty))$, so dass

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 && \text{in } U \times (0, \infty), \\ u &= g && \text{auf } \partial U \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Dann konvergiert $u(x, t)$ mit $t \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Lösung $\bar{u} \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ von

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u} &= 0 && \text{in } U, \\ \bar{u} &= g && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

4 Die Wellengleichung

4.1 Die d'Alembert'sche Formel

Satz 82 (Lösung in 1D). Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Dann

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$;
- (ii) $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$;
- (iii) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\begin{cases} u(x, 0) = g(x), \\ \partial_t u(x, 0) = h(x). \end{cases}$

4.2 Wellengleichung in 2D und 3D

Lemma 83. Für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\frac{\sin(|\xi|r)}{|\xi|} = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B_r(0)} e^{i\xi \cdot y} dS(y).$$

Satz 84 (Lösung in 3D - die Kirchhoffsche Formel). Sei $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$u(x, t) = \oint_{\partial B_t(x)} g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y) dS(y).$$

Dann gilt

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$;
- (ii) $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$;
- (iii) für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $\begin{cases} u(x, 0) = g(x), \\ \partial_t u(x, 0) = h(x). \end{cases}$

Satz 85 (Lösung in 2D - die Poissonsche Formel). Sei $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \oint_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t\nabla g(y) \cdot (y - x) + t^2 h(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dS(y).$$

Dann gilt

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$;
- (ii) $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$;
- (iii) für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $\begin{cases} u(x, 0) = g(x), \\ \partial_t u(x, 0) = h(x). \end{cases}$

4.3 Schwingungen

Satz 86. Sei $f \in C(S^1)$ mit Fourierreihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ikx} \right|^2 dx \rightarrow 0 \text{ mit } N \rightarrow \infty,$$

und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Lemma 87. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1 Rand. Falls $u \in C^2(\overline{U}) \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u & \text{in } U, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial U, \end{aligned}$$

dann $\lambda > 0$.

Satz 88 (Eigenwerte und Eigenfunktionen). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1 Rand. Dann existieren $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ und $u_k \in C^2(U)$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= \lambda_k u_k & \text{in } U, \\ u_k &= 0 & \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $\lambda_k \rightarrow \infty$ und $\{u_k\}$ ist ein vollständiges orthonormales System bezüglich L^2 .

Satz 89 (Weyl'sche Formel). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit C^1 Rand. Sei $N(\lambda) = \#\{\lambda_k < \lambda\}$, wobei λ_k die Eigenwerte sind wie im Satz 88. Dann gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|U|}{4\pi}.$$

4.4 Inhomogene Wellengleichung

Lemma 90. Sei $k \in C^m([0, \infty) \times [0, \infty))$ und $g(t) := \int_0^t k(t-s, s) ds$. Dann ist $g \in C^m([0, \infty))$ und

$$g'(t) = k(0, t) + \int_0^t \partial_1 k(t-s, s) ds.$$

Satz 91. Sei $n = 1, 2, 3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ und

$$u(x, t) = \int_0^t [S(t-s)f(s)](x) ds,$$

wobei

$$[S(t)h](x) = \begin{cases} t \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & n = 1, \\ \frac{1}{2} t^2 \int_{B_t(x)} \frac{h(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}} dy & n = 2, \\ t \int_{\partial B_t(x)} h(y) dS(y) & n = 3. \end{cases}$$

Dann gilt

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$;
- (ii) $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $u(x, 0) = 0$ und $\partial_t u(x, 0) = 0$ für alle x .

4.5 Energiemethode

Satz 92 (Energiegleichung). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1 Rand. Sei $u \in C^2(\overline{U} \times [0, T])$ so dass

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 & U \times (0, T), \\ u &= 0 & \partial U \times (0, T). \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $t \in [0, T]$

$$E(t) = E(0),$$

wobei

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U |\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx.$$

Korollar 93 (Eindeutigkeit). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1 Rand. Es existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{U} \times [0, T])$ zur Anfangswertproblem in U .

Satz 94 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit). Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ so dass

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

und sei $u = \partial_t u = 0$ in $B_{t_0}(x_0)$ für $t = 0$. Dann

$$u = 0 \text{ in } C(x_0, t_0),$$

wobei

$$C(x_0, t_0) = \{(x, t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

Satz 95 (Globale Energiegleichung). Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ so dass

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u - \Delta u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g \text{ und } \partial_t u &= h & \text{in } \mathbb{R}^n \text{ f\"ur } t = 0.\end{aligned}$$

Falls $E(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |h|^2 + |\nabla g|^2 dx < \infty$, gilt

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 dx = E(0)$$

f\"ur alle t .

5 Quasilineare PDG erster Ordnung

5.1 Methode der Charakteristiken

Betrachte die Gleichung

$$a(x, y, u) \partial_x u + b(x, y, u) \partial_y u = c(x, y, u), \quad (52)$$

wobei $a, b, c \in C^1(U \times \mathbb{R})$ und $U \subset \mathbb{R}^2$.

Definition 96. Eine C^1 -Kurve $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *characteristische Kurve* der Gleichung, falls

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = F(\gamma(t)),$$

wobei $F = (a, b, c)$. Die Projektion von γ in die x, y -Ebene wird *Charakteristik* genannt.

Lemma 97. Sei $u \in C^1(U)$ eine Lösung von (52), $(x_0, y_0) \in U$ und $z_0 = u(x_0, y_0)$. Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eine charakteristische Kurve mit $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$. Dann

$$u(x(t), y(t)) = z(t).$$

5.2 Das Cauchyproblem

Satz 98. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $a, b, c \in C^1(U \times \mathbb{R})$ und $f, g, h \in C^1(I)$ und die Cauchy Nebenbedingung nicht-charakteristisch am Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$, d.h.

$$a(x_0, y_0, z_0) g'(s_0) - b(x_0, y_0, z_0) f'(s_0) \neq 0.$$

Dann existiert $\delta > 0$ und $u \in C^1(B_\delta(x_0, y_0))$ so dass

$$\begin{aligned}a \partial_x u + b \partial_y u &= c & \text{in } B_\delta(x_0, y_0) \\ u(f(s), g(s)) &= h(s) & \text{f\"ur alle } s \text{ mit } (f(s), g(s)) \in B_\delta(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Formulierung des Cauchyproblems in $\mathbb{R}^n$: sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $b \in C^1(U \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $c \in C^1(U)$. Sei ferner $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $f, h \in C^1(I)$. Gesucht wird eine Funktion $u \in C^1(U)$ so dass

$$\begin{aligned} b(x, u) \cdot \nabla u &= c(x, u) & x \in U, \\ u(f(s)) &= h(s) & s \in I. \end{aligned}$$

Charakteristische Kurven sind Kurven $\gamma_s(t) = (x(t), z(t)) \in U \times \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_s}{dt} &= F(\gamma_s), \\ \gamma_s(0) &= \Gamma(s), \end{aligned}$$

wobei $F = (b, c) \in C^1(U \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^{n+1})$ und $\Gamma = (f, h) \in C^1(I; U \times \mathbb{R})$. Die nicht-charakteristische Bedingung ist:

$$J = \begin{vmatrix} \partial_{s_1} f_1 & \cdots & \partial_{s_1} f_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{s_{n-1}} f_1 & \cdots & \partial_{s_{n-1}} f_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \neq 0$$

5.3 Allgemeine quasilineare PDG

Das allgemeine Cauchyproblem: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma \subset U$ eine glatte $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Normalenvektor ν . Gesucht wird $u : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ so dass

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, u, x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u, \dots, u, x) = 0 \quad x \in U, \quad (53)$$

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1, \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1} \quad x \in \Gamma, \quad (54)$$

wobei $(a_\alpha)_{|\alpha|=k}$, a_0 , $(g_j)_{j=0, \dots, k-1}$ vorgegeben sind.

Definition 99. Γ heißt *nicht-charakteristisch* für (53), falls

$$\det \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu^\alpha \right) \neq 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

für alle Argumente von a_α , a_0 .

Satz 100. Sei Γ nicht-charakteristisch. Dann sind aus (53)-(54) alle partiellen Ableitungen $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq k$ auf Γ eindeutig bestimmt,

Satz 101 (Cauchy-Kowalewskaja). Seien alle Daten (a, g, Γ) analytisch, $x_0 \in \Gamma$ und sei Γ nicht-charakteristisch für (53) in x_0 . Dann existiert $r > 0$ und genau eine reell analytische Funktion $u = u(x)$ in $B_r(x_0)$ so dass (53)-(54) in $U \cap B_r(x_0)$ erfüllt sind.

5.4 Singularitäten

Beispiel: die Burger's Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u + u \partial_x u &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Lösung u ist konstant entlang Charakteristiken, gegeben durch

$$x = s + u_0(s)t \quad s \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass, falls $u'_0(s) < 0$ für ein s , dann $\sup_x |\partial_x u| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \frac{1}{|u'_0(s)|}$.

6 Zusammenfassung

Lösungsmethoden

1. Trennung der Variablen
2. Entwicklung in eine Potenzreihe
3. Reduktion auf gewöhnliche DG durch Symmetrien
4. Holomorphe Funktionen (Realteil ist harmonisch)
5. Methode der Charakteristiken
6. Darstellungsformel: Faltung mit Fundamentallösung/Green'sche Funktion
7. Fouriertransformation
8. A priori Abschätzungen und Kompaktheit
9. Variationsmethoden

Wichtige Eigenschaften

Elliptisch $-\Delta u = f$

1. (starkes) Maximumprinzip
2. Regularität, hebbare Singularitäten, Analytizität
3. Liouville Satz, Regularität bei ∞
4. Variationsformulierung
5. Mittelwerteigenschaft
6. Randwertproblem wohlgestellt
7. Cauchyproblem nicht wohlgestellt

Parabolisch $\partial_t u - \Delta u = f$

1. (starkes) Maximumprinzip
2. Regularität, sofortige Glättung für $t > 0$, Analytizität in x (aber nicht in t)
3. Eindeutigkeit unter Voraussetzungen
4. Skalierung in x und t
5. Gradientenflussstruktur
6. unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit
7. Halbgruppeneigenschaft, das Duhamel'sche Prinzip
8. Cauchyproblem wohlgestellt
9. Randwertproblem/Rückwärtsgleichung nicht wohlgestellt

Hyperbolisch $\partial_t^2 u - \Delta u = f$

1. kein Maximumprinzip
2. keine Regularität, Fokussierung
3. zeit-reversibel
4. endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, Huygen'sche Prinzip
5. Energieerhaltung
6. Cauchyproblem vorwärts/rückwärts wohlgestellt
7. Randwertproblem nicht wohlgestellt