

Analysis 1

Serie 1

Abgabe: 19.10. vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Punkte: 4).

- (a) Seien I_1 und I_2 zwei Indexmengen und für alle $i \in I_1 \cup I_2$ seien M_i gegebene Mengen. Konstruiere eine injektive Abbildung

$$F : \prod_{i \in I_1 \cup I_2} M_i \rightarrow \left(\prod_{i \in I_1} M_i \right) \times \left(\prod_{i \in I_2} M_i \right).$$

- (b) Sei nun $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Konstruiere nun eine bijektive Abbildung

$$F : \prod_{i \in I_1 \cup I_2} M_i \rightarrow \left(\prod_{i \in I_1} M_i \right) \times \left(\prod_{i \in I_2} M_i \right).$$

Aufgabe 2 (Punkte: 6). Sei $R \subset M \times N$ eine Relation und $M_1 \subset M$ bzw. $N_1, N_2 \subset N$ Teilmengen. Beweise oder finde Gegenbeispiele für die Aussagen!

(a) $R^{-1}(N_1 \cup N_2) = R^{-1}(N_1) \cup R^{-1}(N_2)$

(b) $R(M \setminus M_1) = R(M) \setminus R(M_1)$

(c) $R^{-1}(N_1 \cap N_2) = R^{-1}(N_1) \cap R^{-1}(N_2)$

Aufgabe 3 (Punkte: 4 für den Spezialfall $k = 1$, für $k \in \mathbb{N}$ beliebig 10 Punkte). (a) Formalisiere mit Hilfe einer injektiven Abbildung

$$\Phi : \{0, 1, \dots, k\} \rightarrow \{a \mid a \text{ Aussage innerhalb einer Theorie}\}$$

und den Abbildungen

$$f_{\wedge}(a, b) := a \wedge b, f_{\vee}(a, b) := a \vee b, f_{-}(a) := \neg a, f_{\rightarrow}(a, b) := a \Rightarrow b$$

die zusammengesetzten Aussagen in $k + 1$ Variablen $\Phi(0), \Phi(1), \dots, \Phi(k)$ dritter Stufe, also die Aussagen mit maximal zwei geschachtelten Klammern.

- (b) Wieviele solcher Aussagen gibt es, wenn man die trivialen Aussagen $f_{\wedge}(a, a)$, $f_{\uparrow}(a, a)$, $f_{\vee}(a, a)$ ausschließt?
- (c) Beschreibe die Wahrheitstafel für die zusammengesetzten Aussagen als Abbildung von den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ der Variablen $\Phi(0), \Phi(1), \dots, \Phi(k)$.
- (d) Wieviele nichtäquivalente zusammengesetzte Ausdrücke dritter Stufe gibt es?