

Übungen zur Vorlesung
Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen
Blatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^3 . Für welche Werte von $\kappa \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^\kappa$$

über $B_1(0)$ integrierbar?

Aufgabe 2 (3 Punkte). Berechne das Volumen (λ^3) eines Ellipsoids mit den Halbachsen a , b und c , also der Menge

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ eine Funktion und K der von dieser Funktion erzeugte Rotationskörper, das heißt

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}.$$

Zeige

$$\lambda^3(K) = \pi \int f(z)^2 dz.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte). Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte die zufällig auf $B_1(0)$ platziert sind. Berechne den mittleren quadratischen Abstand der Punkte, das heißt das Integral

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{B_1(0)} \int_{B_1(0)} \|x - y\|^2 d\lambda^2(x) d\lambda^2(y).$$

Hinweis: Führe als neue Koordinaten die Abstände der Punkte zum Koordinatenursprung, den Winkel zwischen den Vektoren x und y sowie einen weiteren Winkel ein. Es muss nicht gezeigt werden, dass die so erhaltene Koordinatentransformation ein Diffeomorphismus ist.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 05.12.2017 abzugeben.