Parameterintegrale

Integrale können auch von Parametern abhängen, denken wir nur an die Gamma-Funktion, die definiert ist für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Hier ist x der Parameter, von dem der Integrand und damit auch das Integral abhängt. Oft ist es wichtig, die Abhängigkeit des Integrals vom Parameter näher beschreiben zu könne, z.B. stetige Abhängigkeit von den Parametern, Differenzierbarkeit nach den Parametern usw.

Satz: (Stetige Abhängigkeit von Parametern)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f:\ [a,b] \times K \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $\varphi:\ K \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(s_1, \ldots, s_n) := \int_a^b f(x, s_1, \ldots, s_n)\, dx$$

stetig über K.

Beweis: Nach den Voraussetzungen ist $[a,b] \times K$ kompakt. Weil f stetig ist über dieser kompakten Menge, ist f dort sogar gleichmäßig stetig. Sei $s = (s_,1, \ldots, s_n)$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x,s) - f(x,s^1)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $x \in [a,b], s, s^1 \in K$ mit $|s - s^1| < \delta$. Daraus folgt

$$|\varphi(s) - \varphi(s^1)| = \left| \int_a^b f(x,s) - f(x,s^1)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x,s) - f(x,s^1)|\, dx < \epsilon$$

für alle $s, s^1 \in K$ mit $|s - s^1| < \delta$. Dies beweist die (gleichmäßige) Stetigkeit von φ.

Der Satz gilt auch für offene Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$, da man jeden Punkt in eine kompakte Mengen euinschließen kann und Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist.

Satz: (Ableitung eines Integrals nach dem Parameter)
Sei $f:\ [a,b] \times]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Für jedes feste $x \in [a,b]$ sei die Abbildung $s \mapsto f(x,s)$ differenzierbar nach s für alle $s \in]\alpha, \beta[$ und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial s}:\ [a,b] \times]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ sei ebenfalls stetig. Dann ist die Funktion $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(s) := \int_a^b f(x,s)\, dx$$

nach s differenzierbar und es gilt für alle $s \in]\alpha, \beta[$:

$$\varphi'(s) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s} f(x,s)\,dx.$$

(Also kann unter diesen Voraussetzungen unter dem Integral nach dem Parameter differenziert werden.)

Beweis: Sei $s_0 \in]\alpha, \beta[$ und $h > 0$ so klein, dass $[s_0 - h, s_0 + h] \subseteq]\alpha, \beta[$ gilt. Unter unseren Voraussetzungen ist dann $\frac{\partial f}{\partial s}$ gleichmäßig stetig über $[a,b] \times [s_0 - h, s_0 + h]$. also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial f}{\partial s}(x,s_1) \right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $x \in [a,b], s, s_1 \in [s_0 - h, s_0 + h]$ mit $|s - s_1| < \delta$. Dies gibt

$$\frac{\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, s_0 + h) - f(x, s_0)}{h}\,dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein von x abhängiges $\theta_x \in]0,1[$ so dass gilt

$$\frac{f(x, s_0 + h) - f(x, s_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial s}(x, s_0 + \theta_x h).$$

Daraus folgt für $|h| < \delta$

$$\left| \frac{f(x, s_0 + h) - f(x, s_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial s}(x, s_0) \right| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Somit wird für $|h| < \delta$

$$\left| \frac{\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(x, s_0)\,dx \right| < \epsilon.$$

Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(x, s_0)\,dx.$$

Der Satz verallgemeinert sich unter den entsprechenden Voraussetzungen auf Integrale, die von n Parametern abhängen. Außerdem hängen oft auch die Integrationsgrenzen vom Parameter ab. Diese Situation beleuchtet die nächste Folgerung.

Folgerung: (Leibnizformel) Sei f wie im letzten Satz und $g, h :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar mit $a \leq g(s) \leq h(s) \leq b$ für alle $s \in [\alpha, \beta[$. Sei

$$\varphi(s) := \int_{g(s)}^{h(s)} f(x,s)\,dx.$$

Dann gilt für alle $s \in [\alpha, \beta[$

$$\varphi'(s) = \int_{g(s)}^{h(s)} \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\,dx + f(h(s),s)\cdot h'(s) - f(g(s),s)\cdot g'(s)$$

Beweis: Sei

$$\psi(u,v,s) := \int_u^v f(x,s)\,dx.$$

Nach dem letzten Satz gilt

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(u,v,s) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\,dx.$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert dann

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v,s) = f(v,s),\ \ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v,s) = -f(u,s).$$

Damit wird

$$\varphi(s) = \psi(g(s),h(s),s).$$

Nach der Kettenregel ist φ differenzierbar mit der Ableitung

$$\varphi'(s) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(g(s),h(s),s)g'(s) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(g(s),h(s),s) + \frac{\partial \psi}{\partial s}(g(s),h(s),s).$$

Dies beweist die Behauptung.

Für uneigentliche Integrale ist die Situation ähnlich, allerdings benötigt man noch eine gleichmäßige Konvergenz des Integrals bezüglich des Parameters.

Definition: Sei $f:\ [a,\infty[\times]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ und das uneigentliche Integral

$$\varphi(s) := \int_a^\infty f(x,s)\,dx$$

konvergiere für alle $s \in]\alpha,\beta[$. Das uneigentliche Integral heißt gleichmäßig konvergent über $]\alpha,\beta[$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein von s unabhängiges $b \geq a$ existiert mit

$$\left| \int_a^b f(x,s)\,dx - \varphi(s) \right| < \epsilon$$

für alle $s \in]\alpha,\beta[$.

Satz: Sei $f:\ [a,\infty[\times]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ stetig und das uneigentliche Integral

$$\varphi(s) := \int_a^\infty f(x,s)\,dx$$

konvergiere für alle $s \in]\alpha, \beta[$ und sei gleichmäßig konvergent bezüglich über $]\alpha, \beta[$. Dann ist

$$\varphi(s) := \int_a^\infty f(x,s)\,dx$$

stetig bezüglich $s \in]\alpha, \beta[$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein b mit

$$\left| \int_a^b f(x,s)\,dx - \varphi(s) \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

für alle $s \in]\alpha, \beta[$. Nach den vorangegangenen Sätzen ist das Integral auf der linken Seite eine stetige Funktion von s. Also existiert zu jedem $s_0 \in]\alpha, \beta[$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \int_a^b (f(x,s_0) - f(x,s))\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

für $|s - s_0| < \delta$. Daraus folgt für $|s - s_0| < \delta$

$$|\varphi(s) - \varphi(s_0)|$$

$$\leq \left| \varphi(s) - \int_a^b f(x,s)\,dx \right| + \left| \int_a^b (f(x,s) - f(x,s_0))\,dx \right| + \left| \int_a^b f(x,s_0) - \varphi(s_0))\,dx \right|$$

$$< \epsilon.$$

Dies zeigt, φ ist stetig in jedem $s_0 \in]\alpha, \beta[$.

Ähnlich wie für die gewöhnlichen Riemann-Integrale erhält man auch für uneigentliche Integrale, die von einem Parameter abhängen, den folgenden Satz über die Ableitung:

Satz: Sei $f: \ [a, \infty[\times]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ stetig und stetig differenzierbar nach der zweiten Variablen. Ferner sollen die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty f(x,s)\,dx \text{ und } \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\,dx$$

existieren und das zweite Integral gleichmäßig für alle $s \in]\alpha, \beta[$ konvergieren. Sei

$$\varphi(s) := \int_a^\infty f(x,s)\,dx.$$

Dann ist φ über $]\alpha, \beta[$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(s) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\,dx.$$

Beispiel: Betrachte für $\lambda > -1$:

$$\varphi(\lambda) := \int_0^\infty \frac{\arctan(\lambda x)}{(1+x^2)x}\, dx$$

Offenbar sind die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsforderungen des letzten satzes erfüllt. Anwendung des letzten Satzes ergibt

$$\varphi'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\lambda^2x^2)(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}([\arctan x]_0^\infty - [\lambda \arctan(\lambda x)]_0^\infty)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\lambda}$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ folgt daraus durch Integration

$$\varphi(\lambda) = \frac{\pi}{2} \ln(1+\lambda).$$

Es bleibt noch die gleichmäßige Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\lambda^2x^2)(1+x^2)}$$

bzgl. $\lambda > -1$ zu zeigen. Es ist offenbar

$$\frac{1}{(1+\lambda^2x^2)(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

und das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

konvergiert. Daher folgt die gleichmäßige Konvergenz des ursprünglichen Integrals.