ÜBUNGEN
PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN II

BLATT 2 – 10.04.2017
(ABGABETERMIN 24.04.2017)

PROF. EMANUELE SPADARO

Übung 1. *(1) Sei $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ mit $\int \varphi = 1$ und $\varphi \geq 0$. Weitere für jedes $\epsilon > 0$ setzen wir $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(x\epsilon^{-1})$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $u \in C^{k+\delta}(\mathbb{R}^n)$ (mit $k \in \mathbb{N}$ und $\delta \in (0,1]$) ist $u_\epsilon := \varphi_\epsilon \star u \in C^{k+\delta}(\mathbb{R}^n)$, mit*

$$|u_\epsilon|_{k,\delta} \leq |u|_{k,\delta} \quad \textit{und} \quad |u|_{k,\delta} = \lim_{\epsilon \to 0^+} |u_\epsilon|_{k,\delta}.$$

(2) Sei $\zeta \in C_c^\infty(B_1)$ mit $\zeta(0) = 0$ und $u \in C^{k+\delta}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\zeta^R(x) := \zeta(xR^{-1})$. Zeigen Sie, dass

$$[u]_{k+\delta} \leq \liminf_{R \to +\infty} [\zeta^R u]_{k+\delta}.$$

Übung 2. *Seien $k, d \in \mathbb{N}$ und $\delta \in [0,1]$, so dass $0 < k + \delta \leq d$. Für $u \in C^{k+\delta}(\mathbb{R}^n)$, sei u_ϵ wie in Übung 1 und setzen Sie*

$$[u]''_{k,\delta} := \sup_{\epsilon > 0} \epsilon^{d-k-\delta}[u_\epsilon]_d.$$

Zeigen Sie, dass die Seminorme $[u]''_{k,\delta}$ und $[u]_{k,\delta}$ äquivalent sind.

Übung 3. *Für $r \in (0,d]$ setzen wir $[u]''_r := [u]''_{k,\delta}$ mit $k + \delta = r$ und $k \in \mathbb{N}$ und $\delta \in [0,1)$. Zeigen Sie, dass $r \mapsto [u]''_r$ eine konvexe Funktion ist und erhalten Sie die folgende Interpolationsungleichung: für alle $t > 0$, $0 \leq s \leq r$ und $u \in C^{k',\delta'}(\mathbb{R}^n)$ mit $k' + \delta' = r + t$ ($k' \in \mathbb{N}$ und $\delta' \in [0,1)$)*

$$[u]_{s+t} \leq C(n,r,t)\, [u]_{r+t}^{\frac{s}{r}}\, [u]_{s+t}^{1-\frac{s}{r}},$$

wobei $C(n,r,t) > 0$ eine dimensionale Konstante ist.

Übung 4. *Sei $\Gamma(x,y)$ die Fundamentallösung der Laplacegleichung:*

$$\Gamma(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\, |x-y|^{2-n}, & n \geq 2, \\ -\frac{1}{2\pi} \log|x-y|, & n = 2. \end{cases}$$

Seien weiter $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränte offene Menge (mit $\partial\Omega$ glatt), $f \in C^\delta(\Omega)$ (mit $\delta \in (0,1]$) und $w(x) := -\int_\Omega \Gamma(x,y)\, f(y)\, dy$. Zeigen Sie, dass $w \in C^2(\Omega)$ und $\Delta w = f$.

ANMERKUNG: 50% = MINDESTENS 2 RICHTIGE HAUSAUFGABEN.