

Übungen zur Vorlesung
Mathematik 2 für Physiker und Meteorologen
Blatt 10

Wie bisher dürfen die Ableitungen der Exponentialfunktion sowie der Winkelfunktionen als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgabe 1 (2 Punkte). Zeige, dass für die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

für alle $\theta \in (0, 1)$ gilt

$$f(1) - f(0) \neq f'(\theta).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Zeige, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und berechne

$$\partial_x \partial_y f(0, 0) - \partial_y \partial_x f(0, 0).$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Bestimme für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{xy}$ das Taylorpolynom vom Grad 2 im Entwicklungspunkt 0 sowie das zugehörige Restglied.

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte). Untersuche die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

auf Vorkommen und Art lokaler Extrema.

Bestimme dazu zunächst die kritischen Punkte, also die Punkte verschwindender Ableitung.

Drücke dann die zweite Ableitung $D^2 f(x)(h, h)$ in den kritischen Punkten in Komponentenschreibweise bezüglich der Standardbasis aus und untersuche sie auf positive/negative Definitheit beziehungsweise Indefinitheit.

Siehe auch Bemerkung 2.52 im Skriptum.

Aufgabe. Seien V_1, V_2, W endlichdimensionale, normierte Räume $A : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ eine multilineare Abbildung. Zeige, dass A stetig ist.

Finde für $v_1, h_1 \in V_1$ und $v_2, h_2 \in V_2$ eine geeignete Darstellung von $A(v_1 + h_1, v_2 + h_2)$ aus der sich ablesen lässt, dass A differenzierbar ist mit

$$DA(v_1, v_2)(h_1, h_2) = A(h_1, v_2) + A(v_1, h_2).$$

Seien nun V, W, U endlichdimensionale, normierte Räume und $v : \mathbb{R} \rightarrow V$, $B_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V|W)$ und $B_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(W|U)$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel auf geschickt gewählte multilineare Abbildungen an, um die folgenden verallgemeinerten Produktregeln zu beweisen:

$$(B_1(v))'(t) = B_1'(t)(v(t)) + B_1(t)(v'(t)) \quad (B_2 \circ B_1)'(t) = B_2' \circ B_1(t) + B_2 \circ B_1'(t).$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Montag, dem 12.06.2017 abzugeben.