Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2017, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 9 - Abgabe am 12.06.2017 vor der Vorlesung

9-1. Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen diagonalisierbar sind:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

9-2. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die reelle 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar?

9-3. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper und $A, B \in \mathcal{K}^{q \times q}$ derart, dass $AB = BA$ gilt. Es sei vorausgesetzt, dass A und B die gleichen Eigenwerte besitzen und die geometrische Vielfachheit sämtlicher Eigenwerte von A wie auch von B eins ist. Weisen Sie nach, dass A und B die gleichen Eigenvektoren besitzen.

9-4. Sei $A \in \mathbb{C}^{q \times q}$. Weisen Sie nach, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn für jeden Eigenwert von A seine algebraische Vielfachheit und seine geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

9-Z. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper und $A \in \mathcal{K}^{q \times q}$ diagonalisierbar. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ alle (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A. Für $j \in \mathbb{Z}_{1,m}$ bezeichne α_j die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_j von A. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) Es gilt $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = q$.

(b) Für $j \in \mathbb{Z}_{1,m}$ sei $\{\mathbf{u}_1^{(j)}, \mathbf{u}_2^{(j)}, \ldots, \mathbf{u}_{\alpha_j}^{(j)}\}$ eine Basis des Eigenraumes U_{A,λ_j} von A zum Eigenwert λ_j. Dann ist $\{\mathbf{u}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\alpha_1}^{(1)}, \mathbf{u}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots \ldots, \mathbf{u}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{u}_{\alpha_m}^{(m)}\}$ eine Basis von $\mathcal{K}^q$.

(c) Sei $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_q\}$ eine Basis von $\mathcal{K}^q$, welche ausschließlich aus Eigenvektoren von A besteht. Für jedes $j \in \mathbb{Z}_{1,m}$ gibt es dann genau α_j zu $\mathcal{B}$ gehörige Vektoren, welche Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_j sind.