ÜBUNGEN
PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN II

BLATT 1 – 03.04.2017
(ABGABETERMIN 10.04.2017)

PROF. EMANUELE SPADARO

Übung 1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\delta > 1$. Finden Sie alle Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ so dass*

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\delta} < +\infty.$$

Übung 2. *Zeigen Sie, dass für $\delta \in (0,1]$ der Raum $(C^{0,\delta}([0,1]), |\cdot|_{\delta,[0,1]})$ ist nicht separabel.*

Übung 3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe offene Menge. Zeigen Sie, dass für jede Folge $\{u_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset C^{k,\delta}(\Omega)$ mit*

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} \big(|u_l|_{0,\Omega} + [u_l]_{k+\delta,\Omega}\big) < +\infty,$$

existiert ein untere Folge $\{u_{l'}\}_{l'\in\mathbb{N}} \subset \{u_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $u \in C^{k,\gamma}(\Omega)$, so dass $u_{l'}$ convergiert nach u in $C^{k,\gamma}(K)$ für jedes $K \subset\subset \Omega$ und jedes $\gamma < \delta$.

Übung 4. *Zeigen Sie, dass für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $u \geq 0$ das folgendes gilt: es existiert eine dimensionale Konstante $C(n) > 0$ so dass*

$$|\nabla u(x)|^2 \leq C(n)\, u(x)\, [u]_2,$$

wobei $[u]_2 = \max_{|\alpha|=2} \sup_{\mathbb{R}^2} |D^\alpha u|$. Insbesondere ist $\sqrt{u}$ Lipschitz stetig.

Anmerkung: 50% = mindestens 2 richtige Hausaufgaben.