Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 15. Mai 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 2 für Physiker und Meteorologen

Blatt 7

Für die Lösung der Aufgaben auf diesem Übungsblatt dürfen die Ableitungen der Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N}$. Finde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die k mal differenzierbar ist, aber nicht $k+1$ mal differenzierbar und weise diese Eigenschaften nach.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f differenzierbar ist, berechne die Ableitung f' und zeige, dass diese nicht stetig ist.

Setze $g(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ und zeige, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

und dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

für $x \to 0$ divergiert.

Ist das ein Widerspruch zur Regel von l'Hospital?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 3, also

$$V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| \, \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ so dass } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \right\}.$$

Zeige, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} e_i : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^i \end{aligned}$$

für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ eine Basis für V bilden.

Zeige, dass durch $\varphi(f) = f'$ eine lineare Abbildung von V nach V definiert wird. Berechne die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basis e_0, e_1, e_2, e_3.

Aufgabe. Für ein Polynom p sei die Funktion

$$
\begin{aligned}
f_p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

gegeben. Zeige, dass f_p stetig ist für jedes Polynom p.

Zeige, dass f_p für jedes Polynom differenzierbar ist und dass ein Polynom q existiert, so dass $f_p' = f_q$.

Zeige, dass f_p beliebig differenzierbar ist für jedes Polynom p.

Wie verhalten sich die Taylor-Reihe und die Taylor-Formel von f_p?

Aufgabe. Konstruiere eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig aber in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Montag, dem 22.05.2017 abzugeben.