

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2017, Prof. Dr. B. Fritzsche

## Serie 5 - Abgabe am 15.05.2017 vor der Vorlesung

5-1. Seien  $\mathcal{K}$  ein Körper sowie  $a \in \mathcal{K}, b \in \mathcal{K}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie, dass die  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

die Determinante  $\det(A) = (a + nb)(a - b)^n$  besitzt.

5-2. Seien  $p, q \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{K}$  ein Körper. Begründen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

(a) Falls  $p > q$  ist, gilt  $\det(AB) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{K}^{p \times q}$  und alle  $B \in \mathcal{K}^{q \times p}$ .

(b) Für alle  $A \in \mathcal{K}^{p \times p}$ , alle  $B \in \mathcal{K}^{p \times q}$  und alle  $D \in \mathcal{K}^{q \times q}$  gilt  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q \times p} & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$ .

(c) Seien  $A \in \mathcal{K}^{p \times p}$ ,  $B \in \mathcal{K}^{p \times q}$ ,  $C \in \mathcal{K}^{q \times p}$  und  $D \in \mathcal{K}^{q \times q}$ . Bezeichne  $E := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

Falls  $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$  und  $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(C)$  erfüllt sind gelten  $\text{rank } E = \text{rank } A + \text{rank } (D - CA^+B)$  und  $\det E = \det A \cdot \det(D - CA^+B)$ .

(d) Falls  $A$  nichtsingulär ist, gilt  $\det E := \det A \cdot \det(C - CA^{-1}B)$ .

(e) Falls  $E$  und  $A$  nichtsingulär sind, ist auch  $L := D - CA^{-1}B$  nichtsingulär und es gilt

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BL^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BL^{-1} \\ -L^{-1}CA^{-1} & L^{-1} \end{pmatrix}.$$

5-3. Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der durch

$$f(z) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & z \\ 4 & 2 & 1 & 1 & z^2 \\ 8 & 2 & -1 & 2 & z^3 \\ 16 & 1 & 1 & -1 & z^4 \end{pmatrix}$$

gegebenen Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

5-4. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Falls  $\mathcal{K}$  ein Körper und  $A \in \mathcal{K}^{q \times q}$  ist, gilt  $\det(A^T) = \det A$ .

(b) Für jedes  $A \in \mathbb{C}^{q \times q}$  gilt  $\det(A^*) = \overline{\det A}$ .

(c) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$  sowie  $A_{jk} \in \mathcal{K}^{q_j \times q_k}$  für alle  $j, k \in \mathbb{Z}_{1,n}$  mit  $j \leq k$ . Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0_{q_2 \times q_1} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0_{q_3 \times q_1} & 0_{q_3 \times q_2} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{q_n \times q_1} & 0_{q_n \times q_2} & 0_{q_n \times q_3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^n \det A_{jj}$$

gilt. Formulieren und beweisen Sie das hierzu analoge Resultat für untere Blockdreiecksmatrizen mit quadratischen Diagonalblöcken.

5-Z. Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Für jedes  $j \in \mathbb{Z}_{1,n-1}$  sei  $P_j$  ein Polynom maximal  $j$ -ten Grades, und es seien  $a_{j0}, a_{j1}, \dots, a_{jj} \in \mathbb{C}$  derart, dass  $P_j(z) = \sum_{k=0}^j a_{jk}z^k$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt. Des Weiteren seien  $z_1, z_2, \dots, z_n$  komplexe Zahlen. Weisen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1(z_1) & P_2(z_1) & \dots & P_{n-1}(z_1) \\ 1 & P_1(z_2) & P_2(z_2) & \dots & P_{n-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & P_1(z_n) & P_2(z_n) & \dots & P_{n-1}(z_n) \end{vmatrix} = \Delta(z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} a_{jj}$$

nach, wobei

$$\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n) := \prod_{1 \leq k < j \leq n} (z_j - z_k)$$

gilt.