Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner
Prof. Thomas Kühn

Leipzig, den 21. 6. 2017

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 8

The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple.
Stan Gudder

Aufgabe 1. (*Produkthalbgruppe*)

a) Sei X ein Banachraum und seien $(T(t))_{t\geq 0}$ und $(S(t))_{t\geq 0}$ zwei C_0-Halbgruppen auf X mit $T(t)S(t) = S(t)T(t)$ für jedes $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $(U(t))_{t\geq 0}$ auf X mit

$$U(t) := T(t)S(t), \quad t \geq 0,$$

ebenfalls eine C_0-Halbgruppe ist. (Hinweis: Überprüfen Sie zuerst, dass $T(t)S(s) = S(s)T(t)$ für alle $t, s \geq 0$ gilt, indem Sie zuerst rationale t und s betrachten.)

b) Zeigen Sie, dass die Kommutativitätsbedingung in a) nicht weggelassen werden kann. (Hinweis: Probieren Sie $X = \mathbb{C}^2$.)

Aufgabe 2. (*Quotientenhalbgruppe*)

a) Seien X ein Banachraum, $T(\cdot)$ eine C_0-Halbgruppe und $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum mit $T(t)Y \subset Y$ für jedes $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Quotientenhalbgruppe $S(\cdot)$ auf X/Y mit

$$S(t)(x + Y) := T(t)x + Y, \qquad x \in X,\ t \geq 0,$$

eine C_0-Halbgruppe ist.

b) Beschreiben Sie X/Y und $S(\cdot)$ in a) für $X := L^1(\mathbb{R})$, die Linkstranslationshalbgruppe $T(\cdot)$ und

$$Y := \{f \in X :\ f|_{[0,\infty)} = 0\}.$$

Aufgabe 3. ($\omega_0(T) = -\infty$ *ist möglich für nicht nilpotente Halbgruppen*)
Sei $X := C_0((-\infty, 0])$ und $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ gegeben durch

$$(T(t)f)(s) := e^{-t^2+2st} f(s - t), \qquad f \in X,\ t \geq 0,\ s \leq 0.$$

Überprüfen Sie, dass $T(\cdot)$ eine C_0-Halbgruppe ist, und berechnen Sie ihre Wachstumsschranke $\omega_0(T)$.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Donnerstag, dem 29. 6. 2017 besprochen.