Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie I

Prof. Dr. B. Fritzsche - Sommersemester 2017

Serie C - Abgabe am 25.04.2017 unmittelbar vor der Vorlesung

C1. (α) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreimaligen Würfeln

(a) in der Summe maximal fünf Augen erscheinen?

(b) genau zweimal das gleiche Ergebnis erscheint?

(c) mindestens zweimal das gleiche Ergebnis erscheint?

(d) sämtliche Würfe ein verschiedenes Ergebnis erbringen?

(e) der dritte Wurf mindestens die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe erbringt?

(f) der zweite Wurf die minimale Augenzahl aller drei Würfe erbringt?

(g) der zweite Wurf zumindest die Augenzahl des ersten Wurfs und der dritte Wurf zumindestens die Augenzahl des zweiten Wurfs erbringt?

(β) Ein Würfel werde beliebig oft geworfen. Beweisen Sie, dass das Ereignis, dass nie eine Sechs gewürfelt wird, die Wahrscheinlichkeit Null besitzt (Beispiel für ein Ereignis, welches **nicht unmöglich** ist, aber die Wahrscheinlichkeit Null besitzt!).

C2. Ein Student beteiligt sich sieben Wochen lang mit jeweils genau einem Los an den Lottowochenziehungen der Spielart "6 aus 49".

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn der Gewinnstufen "5 Richtige mit Zusatzzahl" oder "6 Richtige"?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn der unter (a) genannten Gewinnstufen, wenn der Student alle sieben (verschiedenen) Spielscheine in einer Woche spielt?

C3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Weiterhin bezeichne P_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\mathcal{S}_n, \mathfrak{P}(\mathcal{S}_n))$, d.h. $P_n : \mathfrak{P}(\mathcal{S}_n) \to [0, \infty)$ sei gemäß

$$P_n(A) := \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \mathcal{S}_n}$$

definiert. Weiterhin sei $m \in \mathbb{Z}$ derart, daß $0 \leq m \leq n$ gilt. Es bezeichne F_{nm} die Menge aller Permutationen aus $\mathcal{S}_n$, welche genau m Fixpunkte besitzen sowie E_n die Menge aller Permutationen aus $\mathcal{S}_n$, die keinen Fixpunkte besitzen. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) $\left|P_n(F_{nm}) - \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{e}\right| = \frac{1}{m!} \left| \sum\limits_{k=n-m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{(n-m+1)!}$.

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(F_{nm}) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{e}$.

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(\mathcal{S}_n \setminus E_n) = 1 - \frac{1}{e}$.

C4. (a) Drei Jäger schießen gleichzeitig auf ein Ziel, das von genau einer Kugel getroffen wird. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass das Ziel vom ersten bzw. zweiten bzw. dritten Jäger getroffen wurde, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit für diese 0,2 bzw. 0,4 bzw. 0,6 betragen?

(b) Vor der Kasse eines zoologischen Gartens stehen 100 Personen, von denen jede genau eine Eintrittskarte kaufen will. Eine Karte kostet genau 1 Euro. Von den Besuchern haben 60 nur Eineuromünzen und 40 nur Zweieurostücke. In der Kasse ist vor der Öffnung kein Wechselgeld vorhanden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kartenverkauf ohne Stockung, d.h. ohne Warten auf Wechselgeld, verläuft?