Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2017, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 7 - Abgabe am 29.05.2017 vor der Vorlesung

7-1. Seien $A \in \mathbb{C}^{p\times p}, B \in \mathbb{C}^{p\times q}, C \in \mathbb{C}^{q\times p}$ und $D \in \mathbb{C}^{q\times q}$. Beweisen Sie:

(a) Falls $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ oder $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$ erfüllt ist, gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^+B).$$

(b) Falls $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(D)$ oder $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(D^*)$ erfüllt ist, gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^+C).$$

7-2. Seien $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ und $\lambda, \kappa \in \mathbb{C}$. Bezeichne $B := A + \kappa I_q$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\lambda + \kappa$ ein Eigenwert von B ist.

(b) Sei λ ein Eigenwert von A. Dann stimmen die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ von A und die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda + \kappa$ von B überein.

(c) Sei λ ein Eigenwert von A. Dann stimmen die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von A und die geometrisch Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda + \kappa$ von B überein.

7-3. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$. Es bezeichne $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ die entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit aufgezählten Eigenwerte von A. Weisen Sie nach, dass die Identitäten

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \qquad \text{und} \qquad \det A = \prod_{j=1}^{q} \lambda_j$$

gelten.

7-4. Sei $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt eine Basis von $\mathbb{C}^q$, die ausschließlich aus Eigenvektoren von A besteht.

(ii) Für jeden Eigenwert von A stimmen seine geometrische und seine algebraische Vielfachheit überein.

(iii) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A ist gleich q.

7-Z. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, V ein $\mathcal{K}$-Vektorraum, $\Phi : V \to V$ eine $\mathcal{K}$-lineare Abbildung sowie λ ein Eigenwert von Φ. Zeigen Sie:

(a) Die Menge U_λ bestehend aus dem Nullvektor in V und allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ von Φ bildet einen Unterraum von V (, den sogenannten Eigenraum von Φ zum Eigenwert λ. Die Zahl $\dim U_\lambda$ heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von Φ).

(b) Es gilt

$$\Phi(U_\lambda) = \begin{cases} \{0_V\} & , \text{ falls } \lambda = 0 \\ U_\lambda & , \text{ falls } \lambda \neq 0 \,. \end{cases}$$

(c) Ist μ ein weiterer, von λ verschiedener Eigenwert von Φ, so gilt $U_\lambda \cap U_\mu = \{0_V\}$.