Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 19. Juni 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 2 für Physiker und Meteorologen

Blatt 12

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeige, dass die Funktion

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y^2 - 3x^2y + 2x^4 \end{aligned}$$

die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen im Punkt $(0, 0)$ nicht erfüllt.

Gibt es differenzierbare Lösungsfunktionen f, so dass $F(x, f(x)) = 0$?

Aufgabe 2 (4 Punkte). Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\to (-1, 1) \\ x &\mapsto \sin(x). \end{aligned}$$

Zeige, dass f streng monoton ist.

Damit ist f insbesondere injektiv und die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} g : (-1, 1) &\to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ y &\mapsto \arcsin(y) \end{aligned}$$

existiert. Zeige, dass g differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

(Es darf benutzt werden, dass $\cos(x) > 0$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt.)

Aufgabe 3 (5 Punkte). Betrachte die komplexe Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^z. \end{aligned}$$

Man kann nun im Definitions- und Bildbereich in Real- und Imaginärteil zerlegen, das heißt es existieren eindeutig bestimmte Funktionen $f_{\Re}, f_{\Im} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y \\ f(z) &= f_{\Re}(x, y) + \mathrm{i} f_{\Im}(x, y). \end{aligned}$$

Bestimme $f_{\Re}$ und $f_{\Im}$.

Bestimme die Jakobi-Matrix der zu f gehörenden reellen Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (f_{\Re}(x, y), f_{\Im}(x, y)) \end{aligned}$$

und zeige, dass sie für beliebige Werte von x und y invertierbar ist.

Zeige, dass f, oder äquivalent g, nicht invertierbar ist. Widerspricht das Ergebnis dem Satz über die Umkehrfunktion?

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte). Sei

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

ein reelles Polynom und ξ eine einfache Nullstelle von p, das heißt $p(\xi) = 0$ und $p'(\xi) \neq 0$. Zeige, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ und eine stetige (sogar stetig differenzierbare) Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(\alpha) = \xi$ ist und $f(a)$ eine Nullstelle von

$$p_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

für alle $a = (a_0, \cdots, a_n) \in U$.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Montag, dem 26.06.2017 abzugeben.