

Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie I

Prof. Dr. B. Fritzsche - Sommersemester 2017

Serie F - Abgabetermin: 16.05.2017

- F1. (a) Seien m und n natürliche Zahlen mit $m \geq 2$ und $n \geq 2$. In einem Karton befinden sich m neue und n benutzte Tennisbälle. Dem Karton werden willkürlich zwei Bälle entnommen, mit denen gespielt wird. Nach dem Spiel werden die Bälle in den Karton zurückgelegt. Nach einer gewissen Zeit werden dem Karton wieder zwei Bälle willkürlich entnommen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Bälle neu sind!
- (b) Gegeben sind 2 Partien gewisser Erzeugnisse. Die erste Partie besteht aus N Erzeugnissen, von denen n defekt sind. Die zweite Partie besteht aus M Erzeugnissen, von denen m defekt sind. Der ersten Partie werden willkürlich K Erzeugnisse, der zweiten L Erzeugnisse entnommen ($K < N, L < M$). Die $K + L$ Erzeugnisse werden gemischt, sodass eine Partie entsteht.
- (α) Der neuen Partie wird willkürlich ein Erzeugnis entnommen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Erzeugnis defekt ist!
- (β) Der neuen Partie werden willkürlich drei Erzeugnisse entnommen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines der entnommenen Erzeugnisse defekt ist!
- (c) Eine einer bestimmten Bevölkerungsgruppe angehörende Person besitze mit Wahrscheinlichkeit von 20% einen Hauptwohnsitz in Sachsen, mit Wahrscheinlichkeit von 30% einen Hauptwohnsitz in Thüringen, mit Wahrscheinlichkeit von 40% einen Hauptwohnsitz in Hessen und mit Wahrscheinlichkeit von 10% einen Hauptwohnsitz in Bayern. Es wird willkürlich eine Gruppe von sechs Personen ausgewählt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
- (a) "In der Gruppe befinden sich mindestens 4 Personen mit Hauptwohnsitz in Hessen."
- (b) "In der Gruppe befindet sich mindestens eine Person mit Hauptwohnsitz in Bayern."
- (c) "In der Gruppe ist die Zahl der Personen, die ihren Hauptwohnsitz in Thüringen bzw. Hessen haben, gleich."
- F2. Seien $a \in \mathbb{N}_0$ sowie $b \in \mathbb{N}$ derart, dass $b \geq a$ gilt.
Ein Spieler soll vorhersagen, ob bei einem unverfälschten Münzwurf "Kopf" oder "Zahl" fällt. Während er für eine richtige Vorhersage einen Dollar erhält, muß er für eine falsche Vermutung den gleichen Betrag bezahlen. Bei einem Anfangskapital von a Dollar wird das Spiel so oft wiederholt bis der Spieler einen gewissen festgelegten Zielbetrag von b Dollar erreicht hat oder ruiniert ist, d.h. kein Spielkapital mehr besitzt. Gesucht ist die Ruinwahrscheinlichkeit des Spielers (in Abhängigkeit von a und b).
- F3. Für ein Konzert werden an drei Verkaufsstellen Karten angeboten. Sei $j \in \{1, 2, 3\}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Interessent an die j -te Verkaufsstelle wendet, hängt von der Lage ab und sei $p_j \in (0, 1)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Stunden nach gleichzeitigem Verkaufsbeginn an der j -ten Kasse alle Karten verkauft sind, sei $\pi_j \in (0, 1)$. Ein Interessent kaufte zwei Stunden nach Verkaufsbeginn eine Karte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Karte an der ersten Kasse kaufte?
- F4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ die Menge aller $C \in \mathfrak{A}$, für welche $P(C) = 0$ oder $P(\Omega \setminus C) = 0$ erfüllt ist. Weiterhin sei $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_{P,0}$. Begründen Sie, dass dann auch $\Omega \setminus B \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_{P,0}$ gilt und dass die folgenden beiden Aussagen für beliebig vorgegebenes $A \in \mathfrak{A}$ äquivalent sind:
- (i) Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P .
- (ii) Es gilt $P(A|B) = P(A|\Omega \setminus B)$.