Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2017, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 2 - Abgabe am 19.04.2017 vor der Vorlesung

2-1. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

$$(A^+)^+ = A,\ (A^*)^+ = (A^+)^*,\ (AA^*)^+ = (A^+)^*A^+, (A^*A)^+ = A^+(A^+)^*,\ A^+ = A^*(AA^*)^+,$$
$$A^+ = (A^*A)^+A^*,\ \mathrm{rank}_{\mathbb{C}}(A^+) = \mathrm{rank}_{\mathbb{C}}(A),\ \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*), \mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*).$$

2-2. Seien p, q und r positive ganze Zahlen.

(a) Seien $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ und $B \in \mathbb{C}^{p\times r}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$. (ii) Es gibt ein $X \in \mathbb{C}^{r\times q}$ mit $A = BX$. (iii) $BB^+A = A$.

(b) Seien $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ und $C \in \mathbb{C}^{r\times q}$. Weisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen nach:

(i) $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(C^*)$. (ii) Es gibt ein $Y \in \mathbb{C}^{p\times r}$ mit $A = YC$. (iii) $AC^+C = A$.

2-3. Überprüfen Sie, ob es jeweils eine K-lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ mit den angegebenen K-Vektorräumen V und W und den angegebenen Eigenschaften gibt. Geben Sie im Falle der Existenz eine solche K-lineare Abbildung Φ an und untersuchen Sie, ob dann diese K-lineare Abbildung eindeutig bestimmt ist.

(a) $K = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}^2$; $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\Phi\left(\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\Phi\left(\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.

(b) $K = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}^2$; $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\Phi\left(\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\Phi\left(\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$.

(c) $K = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}^2$; $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\Phi\left(\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

(d) $K = \mathbb{R}, V = W = \mathbb{R}^2$; $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

(e) $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^3, W = \mathbb{C}^4$; $\Phi\left(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}z_1+2z_3\\z_2-z_3\\z_2+z_2\\-z_1+3z_3\end{pmatrix}$ für alle z_1, z_2, z_3 aus $\mathbb{C}$ mit $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$.

(f) K beliebiger Körper, $q \in \mathbb{N}, V = W = K^q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \in K$; $\Phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_q\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\alpha_1x_1\\\alpha_2x_2\\\vdots\\\alpha_qx_q\end{pmatrix}$ für alle $x_1, x_2, \ldots, x_q \in K$.

2-4. Seien V und W Vektorräume über dem Körper K sowie $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Weisen Sie nach, dass im Fall der Injektivität von Φ die wie folgt definierte Abbildung $\Psi : \mathrm{Im}\,\Phi \to V$ eine lineare Abbildung ist:
Für jedes $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}\Phi$ sei $\Psi(\mathbf{w}) := \mathbf{v}$, wobei $\mathbf{v}$ der eindeutig bestimmte Vektor aus V mit $\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ ist. (Man nennt Ψ die Umkehrabbildung von Φ und schreibt Φ^{-1} für Ψ.)

(b) Zeigen Sie, dass im Fall, dass Φ ein Isomorphismus ist, auch die Umkehrabbildung Ψ von Φ ein Isomorphismus ist.

(c) Weisen Sie nach, dass im Fall $\dim_K V = \dim_K W < \infty$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Φ ist injektiv. (ii) Φ ist surjektiv. (iii) Φ ist bijektiv.

Zeigen Sie, dass (im Spezialfall $W = V$) die Menge aller injektiven linearen Abbildungen $\Phi : V \to V$ bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe bildet. In welchen Fällen ist diese Gruppe abelsch?

2-Z. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $\mathrm{rankA} = \mathrm{rank}(\mathrm{A^*A}) = \mathrm{rank}(\mathrm{AA^*})$.

(b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*A)$ und $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(I_q - A^+A)$ sowie $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$.

(c) Sei $b \in \mathbb{K}^p$. Dann ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $AA^+b = b$ erfüllt ist. In diesem Fall ist $\mathcal{L}(A, b) := A^+b + \mathcal{R}(I_q - A^+A)$ die Menge aller Lösungen von $Ax = b$.