Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2017, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 6 - Abgabe am 22.05.2017 vor der Vorlesung

6-1. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{K}$. Bestimmen Sie die Vandermonde-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

6-2. Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(a) Sei $A \in \mathcal{K}^{q \times q}$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(α) $(A^T)^\# = (A^\#)^T$.

(β) $\det(A^\#) = (\det A)^{q-1}$.

(γ) $(A^\#)^\# = (\det A)^{q-2} A$.

(b) Weisen Sie nach, dass $(AB)^\# = B^\# A^\#$ für alle $A, B \in \mathcal{K}^{q \times q}$ gilt.

(c) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $\Phi : \mathcal{K}^{q \times q} \to \mathcal{K}^{q \times q}$ gemäß $\Phi(A) := A^\#$ linear ist.

6-3. Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a) Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\beta) + \sin(\alpha-\gamma)].$$

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ und alle $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{-a, -b, -c\}$ gilt

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}.$$

(c) Sei $\mathcal{K}$ ein Körper. Für alle $a, b, c, d \in \mathcal{K}$ gilt

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

6-4. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sowie $a_1, a_2, \dots, a_n,\ b_1, b_2, \dots, b_{n-1},\ c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in \mathcal{K}$. Für die Determinanten $D_0 := 1, D_1 := a_1$,

$$D_k := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k-1} & b_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{k-1} & a_k \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}_{2,n}$$

leite man die für jedes $k \in \mathbb{Z}_{2,n}$ gültigen Rekursionen $D_k = a_k D_{k-1} - b_{k-1} c_{k-1} D_{k-2}$ her. Geben Sie D_5 an!

6-Z. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1^n & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & 4^n & \dots & (n+2)^n \\ 3^n & 4^n & 5^n & \dots & (n+3)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & (n+3)^n & \dots & (2n+1)^n \end{pmatrix}$$

die Determinante

$$\det A = (-1)^{\binom{n+1}{2}} (n!)^{n+1}$$

besitzt.

(Hinweis: Man beachte $(j+k-1)^n = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} j^{l-1}(k-1)^{n+1-l}$, und stelle A als Produkt von zwei Matrizen dar, deren Determinanten mit Hilfe von Übungsaufgabe 4-4 berechnet werden können.)