Aufgabe 4 von Blatt 5

Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\dot{U} \subset X$ eine punktierte Umgebung von x. Weiterhin seien $f_n, f : \dot{U} \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkte Funktionen derart, dass

1.) f_n gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

2.) für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(y)$ gegen ein $a \in \mathbb{K}$ für $y \to x$ konvergiert, d.h.

$$\exists\, a \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ \lim_{y\to x} f_n(y) = a,$$

Behauptung.

$$\lim_{y\to x} f(y) = a$$

Beweis. Wir zeigen

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall y \in X\ \ mit\ |x - y| < \delta :\ |f(y) - a| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach 1.) ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_N - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Für dieses $N \in \mathbb{N}$ gilt wegen 2.)

$$\lim_{y\to x} f_N(y) = a,$$

d.h. es gibt ein $\delta > 0$ (das von ε und N abhängt) mit

$$\forall y \in X\ \ mit\ |x - y| < \delta :\ |f_N(y) - a| < \varepsilon/2.$$

Dann folgt für alle $y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ auch

$$|f(y) - a| \le |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - a| < \|f - f_N\|_\infty + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Wir definieren nun die Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$, durch

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n, & \text{falls } 0 < |x| < 1, \\ 1, & \text{falls } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Dann gilt für $0 < |x| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

und für $|x| \ge 1$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Also konvergiert $(f_n(x))_n$ punktweise gegen die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < |x| < 1, \\ 1, & \text{falls } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y \nearrow 1} f_n(y) = 1$$

aber

$$\lim_{y \nearrow 1} f(y) = 0.$$

Diese (Gegen-) Beispiel zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen "punkteweise Grenzwerte" überträgt, punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen aber nicht. Insbesondere kann man dies auf die Eigenschaft der Stetigkeit übertragen! (Überlegen Sie sich wie genau!)