ÜBUNGEN
PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN II

BLATT 3 – 26.04.2017
(ABGABETERMIN 03.05.2017)

PROF. EMANUELE SPADARO

Übung 1. *Sei $\Gamma(x,y)$ die Fundamentallösung der Laplacegleichung:*

$$\Gamma(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\,|x-y|^{2-n}, & n \geq 2, \\ -\frac{1}{2\pi}\,\log|x-y|, & n = 2. \end{cases}$$

Seien weiter $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge (mit $\partial\Omega$ glatt), $f \in C^\delta(\Omega)$ (mit $\delta \in (0,1]$) und $w(x) := -\int_\Omega \Gamma(x,y)\, f(y)\, dy$. Zeigen Sie, dass $w \in C^{2,\delta}(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Übung 2. *Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Es sei weiter $u \in C^2(B_1)$ ein Minimierend des Funktional*

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\mathbb{R}^n} F\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\, dx,$$

d.h.

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall\, v \in C^2(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{spt}(u-v) \subset\subset \mathbb{R}^n.$$

Finden Sie die partielle Differentialgleichung gelöst von u und zeigen Sie, dass u glatt ist, falls eine Konstante $\lambda > 0$ existiert, so dass

$$\partial_p^2 F(x,z,p)\,\xi \cdot \xi \geq \lambda\,|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, (x,z,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Übung 3. *Seien $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0,1]$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann definiert man $\partial\Omega \in C^{k,\delta}$, falls Konstanten $\rho_0, K_0 > 0$ existieren, so dass, für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ es gibt eine Abbildung $\psi : B_{\rho_0}(x_0) \to D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D ein Gebiet ist, ψ invertierbar ist und*

(i) $D_+ := \psi(B_{\rho_0}(x_0) \cap \Omega) \subset \{x_n > 0\}$ *und* $\psi(x_0) = 0$;
(ii) $\psi(B_{\rho_0}(x_0) \cap \partial\Omega) = D \cap \{x_n = 0\}$;
(iii) $|\psi|_{k,\delta;B_{\rho_0}(x_0)} + |\psi^{-1}|_{k,\delta;D} \leq K_0$.

Zeigen Sie, dass $u \in C^{2,\delta}(B_{\rho_0}(x_0) \cap \Omega) \iff v := u \circ \psi \in C^{2,\delta}(D_+)$ mit

$$\frac{1}{C}|u|_{2,\delta;B_{\rho_0}(x_0)\cap\Omega} \leq |u|_{v,\delta;D_+} \leq C|u|_{2,\delta;B_{\rho_0}(x_0)\cap\Omega},$$

wobei $C(n,\delta,K_0) > 0$.

Anmerkung: 50% = mindestens 2 richtige Hausaufgaben.

Hinweise für Übung 1.

(i) Betrachten Sie den Fall $\Omega = B_2$ und $\Omega' = B_1$.

(ii) Zeigen Sie die Formula

$$D_{ij}w(x) = \int_{B_2} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial B_2} D_i\Gamma(x-y)\frac{y_j}{|y|}d\sigma(y).$$

(iii) Seien $\delta = |x-\bar{x}|$ und $\xi = \frac{1}{2}(x+\bar{x})$. Betrachten Sie

$$|D_{i,j}w(x) - D_{i,j}w(\bar{x})| = f(x)I_1 + (f(x)-f(\bar{x}))I_2 + I_3 + I_4 + (f(x)-f(\bar{x}))I_5 + I_6,$$

mit

$$I_1 = \int_{\partial B_2} (D_i\Gamma(x-y) - D_i\Gamma(\bar{x}-y))\frac{y_j}{|y|}d\sigma(y),$$

$$I_2 = \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(\bar{x}-y)\frac{y_j}{|y|}d\sigma(y),$$

$$I_3 = \int_{B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(x)-f(y))dy,$$

$$I_4 = \int_{B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))dy,$$

$$I_5 = \int_{B_2\setminus B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(x-y)dy,$$

$$I_6 = \int_{B_2\setminus B_\delta(\xi)} (D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y))(f(\bar{x})-f(y))dy,$$

und abschätzen Sie die Integrale I_i separat.