ÜA Funktionalanalysis 2 - 1. Serie

1. Berechnen Sie jeweils den Operator $|T|$, eine Spektraldarstellung für $|T|$ und eine Schmidt-Darstellung für T.

   (a) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, aufgefasst als Operator in $\mathbb{R}^2$

   (b) $T : \ell_2 \to \ell_2$, definiert durch $Tx = (a_n x_{n+1})$ für $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, wobei (a_n) eine Nullfolge ist und der Raum ℓ_2 reell oder komplex sein kann.

2. Gegeben sei der Volterra-Operator

$$T : L_2[0,1] \to L_2[0,1] \qquad , \qquad Tf(x) := \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

   Berechnen Sie eine Spektraldarstellung für $|T|$. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

   - Bestimmen Sie die Operatoren T^* und T^*T.
   - Formen Sie die Eigenwertgleichung $T^*Tf = \lambda f$ in eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung um und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
   - Aus der Eigenwertgleichung ergeben sich zwei zusätzliche Bedingungen. Damit lassen sich alle λ bestimmen, für die nichttriviale Lösungen $f \neq 0$ existieren.
   - Daraus kann man dann eine Spektraldarstellung für T^*T und für $|T|$ gewinnen.

Besprechung der Lösungen in der Übung am Donnerstag, dem 13.04.2017