Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2017, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 10 - Abgabe am 19.06.2017 vor der Vorlesung

10-1. Sei $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ hermitesch. Es bezeichne λ_1 den größten Eigenwert von A und λ_q den kleinsten Eigenwert von A.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^q\setminus\{\mathbb{O}_{q\times 1}\}} \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}} = \lambda_1 \tag{1}$$
und
$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^q\setminus\{\mathbb{O}_{q\times 1}\}} \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}} = \lambda_q \tag{2}$$
gelten.

(b) Weisen Sie nach, dass das in (1) linksstehende Supremum ein Maximum und das in (2) linksstehende Infimum ein Minimum ist.

(c) Es bezeichne U_{λ_1} (bzw. U_{λ_q}) den zum Eigenwert λ_1 (bzw. λ_q) von A gehörigen Eigenraum. Beweisen Sie, dass $U_{\lambda_1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^q : \mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^*\mathbf{x}\}$ und $U_{\lambda_q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^q : \mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \lambda_q \mathbf{x}^*\mathbf{x}\}$ gilt.

10-2. Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1}^q \in \mathbb{C}^{q\times q}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Bezeichne $e_1^{(q)}, e_2^{(q)}, \ldots, e_q^{(q)}$ die kanonische Basis von $\mathbb{C}^q$. Für jede Wahl von j und k aus $\mathbb{Z}_{1,q}$ erfüllen die Vektoren
$$w_{jk} := \frac{1}{2}\left(e_j^{(q)} + e_k^{(q)}\right),\ x_{jk} := \frac{1}{2}\left(e_j^{(q)} - e_k^{(q)}\right),\ y_{jk} := \frac{1}{2}\left(e_j^{(q)} - ie_k^{(q)}\right) \text{ und } z_{jk} := \frac{1}{2}\left(e_j^{(q)} + ie_k^{(q)}\right)$$
die Beziehung
$$a_{jk} = w_{jk}^* A w_{jk} - x_{jk}^* A x_{jk} + i y_{jk}^* A y_{jk} - i z_{jk}^* A z_{jk}.$$

(b) Es gilt genau dann $A^* = A$, wenn für jedes $x \in \mathbb{C}^q$ die Zahl $x^* A x$ reell ist.

10-3. Die Abbildung $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gemäß
$$v\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$$
definiert. Für $a \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^3$ heißt $v(a,b)$ das Vektorprodukt des Paares $[a,b]$ und wird durch $a \times b$ symbolisiert. Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) Es gilt $a \times b = 0$ genau dann, wenn a und b linear abhängig sind.

(b) $(a \times b) \perp a \quad , \quad (a \times b) \perp b$.

(c) Bezeichnen $< .,. >_E$ und $\|.\|_E$ das euklidische Skalarprodukt bzw. die euklidische Norm des $\mathbb{R}^3$, so gilt $\|a \times b\|_E^2 = \|a\|_E^2 \cdot \|b\|_E^2 - < a, b >_E^2$.
Geben sie eine geometrische Interpretation dieser Gleichung im Fall $a \neq 0, b \neq 0$ an!

(d) $a \times (b \times c) = < a, c >_E \cdot b - < a, b >_E \cdot c$.

10-4. Bestimmen Sie ausgehend von der Basis $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Illustrieren Sie mit Hilfe von Skizzen und Erläuterungen die Vorgehensweise geometrisch. Führen Sie die gleichen Überlegungen für die nur in der Reihenfolge vertauschte Basis $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ durch.

10-Z. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) Falls $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{p\times p}$ (bzw. $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{p\times p}$) erfüllt ist, gilt $B^*AB \in \mathbb{C}_{\geq}^{q\times q}$ (bzw. $B^TAB \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$) für jedes $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ (bzw. $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$).

(b) Falls $A \in \mathbb{C}_{>}^{p\times p}$ (bzw. $A \in \mathbb{R}_{>}^{p\times p}$) erfüllt ist, gilt $B^*AB \in \mathbb{C}_{>}^{q\times q}$ (bzw. $B^TAB \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$) für jede spaltenreguläre Matrix B aus $\mathbb{C}^{p\times q}$ (bzw. $\mathbb{R}^{p\times q}$).