Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie I

Prof. Dr. B. Fritzsche - Sommersemester 2017
Serie D - Abgabetermin: 02.05.2017

D1. Sei $q \in \mathbb{N}$. Weisen Sie nach, daß die Mengensysteme

$$\tilde{J}_{q,a} := \left\{ \mathop{\mathsf{X}}_{j=1}^{q} (-\infty, a_j] : \quad a_1 \in \mathbb{R}, \ldots, a_q \in \mathbb{R} \right\} \quad \textit{und} \quad \tilde{J}_{q,o} := \left\{ \mathop{\mathsf{X}}_{j=1}^{q} (-\infty, a_j) : \quad a_1 \in \mathbb{R}, \ldots, a_q \in \mathbb{R} \right\}$$

$\cap$-stabile Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}_q$ sind.

D2. Es seien Ω und Ω' nichtleere Mengen und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Für jedes $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$ sei $T^{-1}(A')$ das volle Urbild von A' unter T, d.h., es sei $T^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A'\}$. Ist $\mathcal{E}'$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega')$, so bezeichne

$$T^{-1}(\mathcal{E}') := \begin{cases} \{T^{-1}(A') : A' \in \mathcal{E}'\} & , \quad \text{falls} \quad \mathcal{E}' \neq \emptyset \\ \emptyset & , \quad \text{falls} \quad \mathcal{E}' = \emptyset. \end{cases}$$

Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

(a) $T^{-1}(\Omega') = \Omega$.

(b) Für alle $A', B' \in \mathfrak{P}(\Omega')$ gilt $T^{-1}(B' \setminus A') = (T^{-1}(B')) \setminus (T^{-1}(A'))$ und insbesondere $T^{-1}(\Omega' \setminus A') = \Omega \setminus (T^{-1}(A'))$.

(c) Für jede Familie $(A'_k)_{k \in I}$ von Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega')$ gilt

$$T^{-1}\left(\bigcup_{k \in I} A'_k \right) = \bigcup_{k \in I} T^{-1}(A'_k).$$

D3. Es seien Ω und Ω' nichtleere Mengen und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Für jedes $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$ sei $T^{-1}(A')$ das volle Urbild von A' unter T. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

(a) Für jede Familie $(A'_k)_{k \in I}$ von Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega')$ gilt

$$T^{-1}\left(\bigcap_{k \in I} A'_k \right) = \bigcap_{k \in I} T^{-1}(A'_k).$$

(b) Für jede Wahl von Mengen $A', B' \in \mathfrak{P}(\Omega')$, die $A' \cap B' = \emptyset$ erfüllen, gilt $T^{-1}(A') \cap T^{-1}(B) = \emptyset$.

(c) Für beliebige Mengen A und B heißt $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und B. Für alle $A', B' \in \mathfrak{P}(\Omega')$ gilt dann

$$T^{-1}(A' \triangle B') = (T^{-1}(A')) \triangle (T^{-1}(B')).$$

(d) Für jede Algebra $\mathfrak{A}'$ in Ω' ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine Algebra in Ω.

(e) Falls $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω' ist, so ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in Ω.

(f) Falls $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω ist, so ist

$$\mathfrak{A}_T := \{A' \in \mathfrak{P}(\Omega') : T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$$

eine Algebra in Ω'.

(g) Falls $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, so ist $\mathfrak{A}_T$ eine σ-Algebra in Ω'.

(h) Für jede Teilmenge $\mathcal{E}'$ von $\mathfrak{P}(\Omega')$ ist die vom Mengensystem $T^{-1}(\mathcal{E}')$ in Ω erzeugte σ-Algebra gerade das volle Urbild der von $\mathcal{E}'$ in Ω' erzeugten σ-Algebra unter T, d.h. es gilt $\sigma_\Omega(T^{-1}(\mathcal{E}')) = T^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{E}'))$.

D4. Seien $p \in (0, 1]$ und $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß

$$G_{p,r} := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \cdot p^r \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ ist. (Es heißt $G_{p,r}$ die negative Binomialverteilung mit den Parametern p und r. Im Spezialfall $r = 1$ nennt man diese Verteilung geometrische Verteilung mit dem Parameter p.)