ÜA Funktionalanalysis 2 - 4. Serie

1. *(Nukleare Operatoren)*

   Ein Operator $T \in L(X,Y)$ zwischen zwei Banachräumen X und Y heißt *nuklear*, wenn er eine nukleare Darstellung besitzt, d.h. wenn Funktionale $a_k \in X'$ und Vektoren $y_k \in Y$ existieren mit

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| \, \|y_k\| < \infty \quad \text{und } Tx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, y_k \quad \text{für alle } x \in X\,.$$

   Die nukleare Norm von T ist dann definiert als

   $$\nu(T) := \inf \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_{X'} \|y_k\|_Y\,,$$

   wobei das Infimum über alle nuklearen Darstellungen von T genommen wird.

   Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Die Menge

   $$N(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : T \text{ ist nuklear}\}$$

   ist ein Banachraum bezüglich der nuklearen Norm ν.

   Hinweis. Reihenkriterium für die Vollständigkeit normierter Räume

   (b) Die nuklearen Operatoren besitzen die Idealeigenschaft, d.h. aus $S \in L(X,X_0), T \in N(X_0,Y_0), R \in L(Y_0,Y)$ folgt $RTS \in N(X,Y)$, und in diesem Fall gilt

   $$\nu(RTS) \le \|R\| \cdot \nu(T) \cdot \|S\|\,.$$

   (c) Für beliebige Banachräume X und Y gilt die Inklusion

   $$\mathcal{A}_1(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) < \infty\} \subseteq N(X,Y)\,.$$

   ($a_n(T)$ ist die n-te Approximationszahl von T, siehe Vorlesung.)

Besprechung der Lösungen in der Übung am 11.05.2017