ÜA Funktionalanalysis 2 - 2. Serie

1. *(Version des Spektralsatzes für Integraloperatoren mit stetigem Kern)*
   Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$ für alle $x, t \in [0,1]$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Integraloperator T_k mit Kern k,
   $$(T_k f)(x) := \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt,$$
   kompakt und selbstadjungiert im komplexen Hilbertraum $L_2[0,1]$ ist.

   (b) Nach dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum konvergiert dann die mit den Eigenwerten λ_j und zugehörigen Eigenfunktionen f_j gebildete Reihe
   $$(T_k)f(x) = \sum_j \lambda_j \langle f, f_j \rangle f_j(x)$$
   für jedes $f \in L_2[0,1]$ in der Norm des Raumes $L_2[0,1]$.
   Zeigen Sie die folgende Verschärfung: Für stetiges f konvergiert die Reihe sogar absolut und gleichmäßig.

2. *(Approximationszahlen)*

   (a) Zeigen Sie: Für die identische Abbildung in einem n-dimensionalen Banachraum X gilt stets
   $$a_n(id : X \to X) = 1\,.$$

   (b) Zu einer monotonen Folge reeller Zahlen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$ betrachten wir den durch
   $$D_\sigma x := (\sigma_n x_n) \quad \text{für } x = (x_n) \in \ell_p$$
   definierten Diagonaloperator D_σ in ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$.
   Zeigen Sie: $\;a_n(D_\sigma : \ell_p \to \ell_p) = \sigma_n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. *(Schattenklassen)*
   Seien H_1, H_2 Hilberträume und $0 < p < \infty$.
   Zeigen Sie, dass die Schattenklasse $S_p(H_1, H_2)$ einen Vektorraum bildet.
   Hinweis: Additivität der singulären Zahlen verwenden

Besprechung der Lösungen in der Übung am Donnerstag, dem 20.04.2017