Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 12. April 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 2 für Physiker und Meteorologen

Blatt 2

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeige, dass

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

in $M_{n\times n}$ mit der Norm $\|\cdot\|_{n\times n}$ (siehe Aufgabe 1 vom Blatt 0,5) konvergiert. Dazu darf verwendet werden, dass der Raum $(M_{n\times n}, \|\cdot\|_{n\times n})$ vollständig ist. Konvergieren auch die einzelnen Einträge der Matrixreihe?

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent und absolut konvergent. Zeige die Dreiecksungleichung für Reihen:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \,.$$

Gilt die Ungleichung auch, wenn die Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent ist?

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $r > 0$, (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Zeige, dass in (X, d) die Menge

$$B_r(x) = \{y \in X |\ d(x, y) < r\}$$

offen und die Menge

$$K_r(x) = \{y \in X |\ d(x, y) \leq r\}$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum und

$$\tau := \{O \subset X |\ O \text{ offen}\} \,.$$

Zeige

(i) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$,

(ii) für $\sigma \subset \tau$ ist $\bigcup_{O\in\sigma} O \in \tau$ (beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen),

(iii) für $O_1, \dots, O_n \in \tau$ ist $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$ (endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen).

Aufgabe. Sei M eine Menge (mit mindestens zwei Elementen) versehen mit der diskreten Metrik (siehe Aufgabe 2 vom Blatt 1). Sei $x \in M$ fest. Bestimme den Abschluss der offenen Kugel

$$B_1(x) = \{y \in M | \, d(x, y) < 1\}$$

und vergleiche mit der abgeschlossenen Kugel

$$K_1(x) = \{y \in M | \, d(x, y) \leq 1\} \, .$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 19.04.2017 abzugeben.