Letzte Aufgabe vom Blatt 1

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere die Abbildung $q : X \times X \to [0, \infty)$ durch

$$q(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Behauptung.

q ist eine Metrik auf X.

Beweis.

1. $q(x, y) \in [0, \infty)$ ist für alle $x, y \in X$ wohldefiniert, da $d(x, y) \in [0, \infty)$.

2. Die Definitheit von q folgt aus der Definitheit von d.

3. Die Symmetrie von q folgt aus der Symmetrie von d.

4. Wir zeigen die Dreiecksungleichung. Seien $x, y, z \in X$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &= 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} \\ &= q(x, z) + q(z, y). \end{aligned}$$

$\square$

Behauptung. *Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X. Dann gilt*

$$(x_n)_n \text{ konvergent bzgl. } d \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n)_n \text{ konvergent bzgl. } q.$$

Beweis.

"$\Longrightarrow$" Es sei $z \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$. Es gilt

$$0 \leq q(x_n, z) = \frac{d(x_n, z)}{1 + d(x_n, z)} \leq d(x_n, z).$$

Damit folgt aus dem Sandwich-Theorem sofort, dass $\lim_{n\to\infty} q(x_n, z) = 0$.

"$\Longleftarrow$" Es sei $z \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} q(x_n, z) = 0$. Dann gilt

$$d(x_n, z) = \frac{q(x_n, z)}{1 - q(x_n, z)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{1} = 0.$$

$\square$