Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 22. Mai 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 2 für Physiker und Meteorologen

Blatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine in $x \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbare Funktion. Zeige, dass $\partial_i f(x) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, falls f in x ein lokales Extremum hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x, h \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet

$$\partial_h f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung h falls der Grenzwert existiert.

Betrachte nun die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 1 & y \leq 0 \\ 1 & y > x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Stelle anhand einer Skizze die Gebiete dar, auf denen die Funktion die Werte 0 und 1 annimmt.

Für ein fest gewähltes $h \in \mathbb{R}^2$, finde eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von 0, so dass die Abbildung $t \mapsto f(th)$ für $t \in U$ konstant ist.

Bestimme die Richtungsableitungen von f im Punkt 0 für beliebige Richtungen $h \in \mathbb{R}^2$ falls diese existieren.

Ist f total differenzierbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimme die Jakobimatrix der Kugelkoordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \Psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta). \end{aligned}$$

Für welche Werte (r, φ, θ) ist diese Matrix invertierbar?

Aufgabe 4 (3 Punkte). Seien $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $h_1, h_2, h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ total differenzierbare Funktionen. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $t \mapsto g(h_1(t), h_2(t), h_3(t))$. Zeige mit Hilfe der Kettenregel, dass f total differenzierbar ist. Finde einen Ausdruck für f' der nur von den partiellen Ableitungen von g und h_1, h_2, h_3 abhängt.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Montag, dem 29.05.2017 abzugeben.