Letzte Aufgabe vom Blatt 4

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{falls } x = p/q \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}, ggT(p,q) = 1 \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Behauptung. *f ist stetig in allen irrationalen Punkten $r \in (0, \infty) \backslash \mathbb{Q}$.*

Beweis. Sei $r \in (0, \infty)$ irrational, dann ist $f(r) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Definiere die Menge

$$S := \left\{ x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, r - 1 < x < r + 1, 0 < q \leq N \right\}.$$

Diese Menge ist nichtleer und enthält nur endlich viele Elemente, da für alle $x = \frac{p}{q} \in S$ aus $0 < \frac{p}{q} < r + 1$ und $0 < q \leq N$ auch folgt

$$0 < p < N(r + 1).$$

Wir wählen nun eine δ-Umgegung von r, die keine Elemente aus S enthält. Wir setzen dazu

$$\delta := \min\{|r - y| : y \in S\} > 0.$$

Es ist $\delta > 0$, da $r \notin S$. Für alle $x \in (0, \infty) \backslash \mathbb{Q}$ mit $|x - r| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(r)| = 0 < \varepsilon..$$

Für alle $x = \frac{p}{q} \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}, p, q \in \mathbb{N}$, mit $|x - r| < \delta$ folgt, dass $x \notin S$ und somit ebenfalls

$$|f(x) - f(r)| = |f(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

□

Behauptung. *f ist unstetig in allen rationalen Punkten $x_0 \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$.*

Proof. Annahme: Sei f stetig in $x_0 = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, ggT(p, q) = 1$.

Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (0, \infty) \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - \frac{1}{q}| < \varepsilon.$$

Insbesondere existiert für $\tilde{\varepsilon}. = \frac{1}{q}$ ein $\tilde{\delta} > 0$, s.d.

$$\forall x \in (0, \infty) \text{ mit } |x - x_0| < \tilde{\delta} : \ |f(x) - \frac{1}{q}| < \frac{1}{q}. \tag{1}$$

Da $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}$ ist, existiert ein $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $|\alpha - x_0| < \tilde{\delta}$. Für dieses α folgt dann $f(\alpha) = 0$ und wegen (1) auch

$$\frac{1}{q} = |f(\alpha) - \frac{1}{q}| < \frac{1}{q}.$$

Dies ist ein Widerspruch. □