Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 10. Mai 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 2 für Physiker und Meteorologen

Blatt 6

Aufgabe 1 (2 Punkte). Bestimme die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n^2}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit nichtverschwindenden Koeffizienten und positivem Konvergenzradius. Setze für festes $n \in \mathbb{N}$

$$\rho = \sup_{k>n} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Zeige, dass für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \frac{1}{\rho}$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leq \frac{|a_{n+1}| \, |x|^{n+1}}{1 - \rho \, |x|}.$$

Auf wie viele Stellen genau wird die Exponentialfunktion an der Stelle $x = 1$ durch ihre 100-ste Partialsumme approximiert (nach der obigen Abschätzung)? Zur Berechnung des Zahlenwertes kann die Stirling-Formel benutzt werden.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ mit positivem Konvergenzradius. Zeige:

(i) falls $a_0 \neq 0$, so existiert eine Umgebung (Kugel) um 0, so dass auf dieser Umgebung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \neq 0$ ist,

(ii) falls $a_k \neq 0$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$ so existiert eine Umgebung von 0, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auf dieser Umgebung keine Nullstelle außer 0 besitzt,

(iii) falls $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ eine weitere Potenzreihe ist und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ auf einer Menge mit Häufungspunkt 0 so gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in U$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ in x differenzierbare Funktionen. Zeige:

(i) $f + g$ ist differenzierbar in x und es gilt $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(ii) fg ist differenzierbar in x und es gilt $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(iii) falls $f(x) \neq 0$, so existiert eine Umgebung von x auf der f von null verschieden ist und es gilt

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Aufgabe. Definiere folgenden Mengen

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_n &= \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + C_{n-1}\right), \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und damit die Cantor-Menge

$$C := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Definiere nun Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= x \\ f_n(x) &:= \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) & x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Stelle C_n und f_n für kleine n bildlich dar. Zeige, dass f_n stetig ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Zeige, dass f differenzierbar auf $[0,1] \setminus C$ ist und dort $f'(x) = 0$ gilt.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Montag, dem 15.05.2017 abzugeben.