Die komplexe Exponentialfunktion und die Winkelfunktionen

In dieser Zusammenfassung werden die für uns wichtigsten Eigenschaften der komplexen und reellen Exponentialfunktion sowie der Winkelfunktionen bewiesen. Ein großer Teil dieser Resultate war Teil der Vorlesung im 1. Semester, wir geben die Beweise hier dennoch nochmals an. Wesentlich neu sind alle Teile, die auf der Stetigkeit dieser Funktionen beruhen. Hinsichtlich verwendeter Eigenschaften stetiger Funktionen wird auf die Vorlesung Analysis 2 verwiesen.

Satz: Die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Beweis: Sei $z \neq 0$. Setze $x_j := z^j/j!$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Es folgt

$$\frac{|x_{j+1}|}{|x_j|} = \frac{|z|}{j+1} \leq \frac{1}{2}$$

für $j \geq 2|z|$ und aus dem Quotientenkriterium folgt die absolute Konvergenz der Reihe. Somit konvergiert die Reihe auf $\mathbb{C}$ absolut. $\square$

Definition: Die Funktion $\exp: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$z \mapsto \exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

heißt komplexe Exponentialfunktion.

Satz: (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)
Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z).$$

Beweis: Da die Exponentialreihe absolut auf $\mathbb{C}$ konvergiert, folgt mittels

der Cauchyschen Produktformel

$$\exp(w) \cdot \exp(z) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

Die binomische Formel besagt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!}(w+z)^n$$

und daher folgt

$$\exp(w) \cdot \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(w+z)^n = \exp(z+w). \ \square$$

Satz: Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{C}$ stetig.

Beweis: Aus der Vorlesung Analysis 2 wissen wir, dass jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion ist. Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ stetig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz: Sei e die Eulersche Zahl. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = e^x.$$

Beweis: Aus der Vorlesung Analysis 1 wissen wir, dass gilt

$$\exp(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

Also wird

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e^2$$

Mittels Induktion folgt hieraus

$$\exp(k) = e^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $0 = k - k$ und $\exp(0) = 1$ folgt

$$1 = \exp(k-k) = \exp(k)\exp(-k) = e^k \exp(-k),$$

also

$$\exp(-k) = e^{-k}$$

Dies zeigt

$$\exp(l) = e^l$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$. Für $q \in \mathbb{N}$ folgt daher

$$e = \exp(1) = \exp\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = \exp\left(\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}\right)$$

wobei rechts q-Summanden stehen. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich nun

$$e = \left(\exp(\frac{1}{q})\right)^q,$$

woraus folgt

$$\exp(\frac{1}{q}) = e^{\frac{1}{q}}.$$

Sei nun $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Dann wird

$$\exp(\frac{p}{q}) = \exp\left(\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}\right) = \left(\exp(\frac{1}{q})\right)^p = e^{\frac{p}{q}}$$

wobei in der mittleren Formel p Summanden stehen. Ähnlich zeigt man $\exp(-\frac{p}{q}) = e^{-\frac{p}{q}}$. Also folgt für alle $r \in \mathbb{Q}$

$$\exp(r) = e^r$$

Da jede reelle Zahl x Grenzwert einer Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$rationaler Zahlen ist und die Exponentialfunktion stetig ist (also insbesondere folgenstetig), erhalten wir schließlich

$$\exp(x) = \exp(\lim_{k\to\infty} r_k) = \lim_{k\to\infty} \exp(r_k) = \lim_{k\to\infty} e^{r_k} = e^{\lim_{k\to\infty} r_k} = e^x \ \square$$

Somit stimmt die Exponentialfunktion für reelle x mit der aus der Schule bekannten e-Funktion überein.

Satz: Die Exponentialfunktion besitzt in $\mathbb{C}$ keine Nullstellen. (D.h., es ist $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.)

Beweis: Es ist

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

Also muss $\exp(z) \neq 0$ gelten. $\square$

Satz: Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

Beweis: Zunächst folgt

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1,$$

also

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

Weiter wird wegen der Stetigkeit der Abbildung $z \mapsto \overline{z}$:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{z^k}{k!}} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}). \ \square$$

Die reelle Exponentialfunktion $\exp_{\mathbb{R}}(x) = e^x$

Satz:

i) Für $x < 0$ gilt $0 < e^x < 1$, für $x > 0$ gilt $1 < e^x < \infty$.

ii) Die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.

iii) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

iv) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\lim_{x\to-\infty} e^x x^m = 0$$

Beweis:

i) Es ist
$$e^x = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$
und für $x > 0$ ist die Reihe rechts positiv. Also folgt $e^x > 0$ für $x > 0$. Falls $x < 0$, so ist $-x > 0$, also nach dem eben bewiesenen $e^{-x} > 1$. Dies zeigt sofort $e^x < 1$ für $x < 0$. Die andere Aussage $e^x > 0$ gilt offensichtlich, da es keine Nullstelle gibt.

ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Es ist $e^x > 0$ und $e^{y-x} > 1$ nach i). Daher folgt
$$e^y = e^{x+(y-x)} > e^x$$
und die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.

iii) Sei $\alpha < 0$. Dann wird für $x > 0$ wegen $\alpha < 0$
$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{1}{x^\alpha} \to +\infty \text{ für } x \to \infty.$$
Sei nun $\alpha \geq 0$ und $n := [\alpha] + 1$, wobei $[\alpha]$ der größte ganze Teil von α ist. Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt und $X := |C|(n+1)!$. Dann gilt für $x > \max\{1, X\}$:
$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!} > \frac{1}{x^n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)!} > \frac{X}{(n+1)!} = |C| \geq C.$$
Dies zeigt die Behauptung.

iv) Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt und $X := \dfrac{(m+1)!}{\epsilon}$. Dann folgt für $x < -X$
$$|x^m e^x| = \frac{|x|^m}{e^{|x|}} < |x|^m \frac{(m+1)!}{|x|^{m+1}} = \frac{(m+1)!}{|x|} < \frac{(m+1)!}{X} = \epsilon.$$
Dies beweist iv).

Insbesondere gilt also

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Die Sinus- und Kosinusfunktion

Satz: Die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

konvergieren absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Da die komplexe Exponentialfunktion den Konvergenzradius unendlich hat, folgt aus der Formel von Hadamard

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

Dies zeigt

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty,$$

also konvergiert die Folge $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und alle ihre Teilfolgen uneigentlich gegen $+\infty$. Daraus folgt

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(2n)!} = +\infty$$

und

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{(2n+1)!} = +\infty$$

Aus der Hadamard'schen Formel folgt, dass beide Potenzreihen den Konvergenzradius unendlich besitzen, also für alle $z \in \mathbb{C}$ ansolut konvergieren. $\square$

Definition Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir durch

$$\cos: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \cos(z) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}$$

die Kosinusfunktion und durch

$$\sin: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \sin(z) := \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

die Sinusfunktion.

Satz: Die Sinus- und Kosinusfunktionen sind auf ganz $\mathbb{C}$ stetige Funktionen.

Beweis: Im Innern des Konvergenzkreises sind konvergente Potenzreihen stetig. Da beide Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren, sind beide Funktionen auf $\mathbb{C}$ stetig. □

Definition Eine Funktion f heißt gerade (bzw. ungerade) wenn folgendes gilt

i) Mit $z \in \mathbb{D}_f$ ist auch $-z \in \mathbb{D}_f$,

ii) Für alle $z \in \mathbb{D}_f$ gilt

$$f(z) = f(-z) \text{ (bzw. f(z) = -f(-z))}$$

Folgerung: Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion, die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion.

Beweis: Folgt unmittelbar, indem man z und $-z$ in die Potenzreihen einsetzt. □

Satz: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt die Eulersche Formel:

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

Es ist

$$i^{2j} = (i^2)^j = (-1)^j \text{ und } i^{2j+1} = ii^{2j} = (-1)^j i.$$

Daher folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(z) + i\sin(z). \ \square$$

Folgerung: Setzt man $\exp(z) = e^z$, so gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ und } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Beweis: Aus der Formel von Euler folgt für z und $-z$:

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \quad e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)$$

Dies gibt unmittelbar

$$2\cos(z) = e^{iz} + e^{-iz} \quad \text{und } 2i\sin(z) = e^{iz} - e^{-iz}.\square$$

Folgerung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

Beweis: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ wird

$$\begin{aligned}
\sin^2(z) + \cos^2(z) &= \\
&= \frac{1}{(2i)^2}(e^{iz} - e^{-iz}) + \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz}) \\
&= -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) \\
&= 1.\ \square
\end{aligned}$$

Theorem: (Additionstheoreme der Sinus- und Kosinusfunktion) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

i)
$$\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w)$$

ii)
$$\sin(z \pm w) = \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z9\sin(w)$$

Beweis: Es wird

$$\begin{aligned}
\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) \\
&+ \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) \\
&= \cos(z + w)
\end{aligned}$$

Ersetzt man hier w durch $-w$, so folgt die zweite Formel von i). Teil ii) beweist man ähnlich. $\square$

Satz: Für die Sinus- und Kosinusfunktionen gelten folgende Relationen: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist

i)
$$\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$$

ii)
$$\cos(z) - \cos(w) = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$$

Beweis: Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Setze $u = \frac{z+w}{2}$ und $v = \frac{z-w}{2}$. Dann ist $u + v = z$ und $u - v = w$. Mittels des Additionstheorems folgt

$$\begin{aligned} \sin(z) - \sin(w) = \sin(u+v) - \sin(u-v) &= 2\cos(u)\sin(v) \\ &= 2\cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2} \end{aligned}$$

Dies beweist i). Teil ii) folgt analog. □

Folgerung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\sin(x)| \leq 1, \; |\cos(x)| \leq 1.$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Formel $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

Hilfssatz:

i) Für alle $x \in]0, 2[$ gilt $\sin(x) > 0$.

ii) Es ist $\cos(2) < 0$.

Beweis:

i) Es wird

$$\begin{aligned} \sin(x) = & \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{x^{4j-3}}{(4j-3)!} - \frac{x^{4j-1}}{(4j-1)!} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{4j-3}}{(4j-3)!} \left[1 - \frac{x^2}{(4j-2)(4j-1)} \right] \end{aligned}$$

Für $x \in]0, 2[$ gilt $x^2 < (4j-2)(4j-1)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Also ist der Klammerausdruck rehcts positiv und es folgt $\sin(x) > 0$ für $x \in]0, 2[$.

ii) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $4 < (4j-1)4j$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\cos(2) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{2^{2j}}{(2j)!} &= 1 - 2 + \frac{2}{3} - \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{2^{4j-2}}{(4j-2)!} - \frac{2^{4j}}{(4j)!}\right] \\ &= -\frac{1}{3} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{2^{4j-2}}{(4j-2)!}\left[1 - \frac{4}{4j(4j-1)}\right] \\ &< 0,\end{aligned}$$

denn der Klammerausdruck ist negativ. $\square$

Satz: Es gibt genau eine Zahl $\xi \in]0,2[$ mit $\cos(\xi) = 0$.

Beweis: Es ist $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 0$. Weil die Kosinusfunktion stetig ist, gibt es also in $]0,2[$ mindestens eine Nullstelle, vgl. den entsprechenden Satz aus Analysis 2. Angenommen, es würde in $]0,2[$ zwei Nullstellen der Kosinusfunktion geben. Seien dies ξ_1 und ξ_2, o.B.d.A. sei $\xi_1 < \xi_2$. Dann ist $\frac{\xi_1 \pm \xi_2}{2} \in]0,2[$ und aus dem Additionstheorem folgt

$$0 = \cos(\xi_1) - \cos(\xi_2) = \sin\frac{\xi_2 - \xi_1}{2}\sin\frac{\xi_2 + \xi_1}{2} > 0.$$

Also muss $\xi_1 = \xi_2$ sein. $\square$

Definition: Die Zahl 2ξ, wobei ξ die Nullstelle der Kosinusfunktion in $]0,2[$ aus dem letzten Satz ist, heißt Pi, symb. $\pi := \xi$.

(Also besitzt die Kosinusfunktion genau eine Nullstelle im Intervall $]0,2[$ an der Stelle π. Obige Definition legt π fest.)

Satz: (Werte der Winkelfunktionen) Es gilt

i) $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$, $\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$. Für $x \in]0,\pi/2[$ gilt $\cos(x) > 0, \sin(x) > 0$.

ii) Es gilt $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ und für $x \in]\pi/2,\pi[$ gilt $\cos(x) < 0$, $\sin(x) > 0$.

iii) Es gilt $\cos(3\pi/2) = 0$, $\sin(3\pi/2) = -1$ und für $x \in]\pi, 3\pi/2[$ gilt $\cos(x) < 0$, $\sin(x) < 0$.

iv) Es gilt $\cos(2\pi) = 1, \sin(2\pi) = 0$ und für $x \in]3\pi/2, 2\pi[$ gilt $\cos(x) > 0, \sin(x) < 0$.

Beweis:

i) $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ folgt unmittelbar aus den Potenzreihen. $\cos(\pi/2) = 0$ wurde schon gezeigt. Wegen $\cos^2(\pi/2)+\sin^2(\pi/2) = 1$ folgt zunächts $\sin^2(\pi/2) = 1$ und wegen $\sin(x) > 0$ für $x \in]0, 2[$ wird $\sin(\pi/2) = 1$. Da cos eine stetige Funktion ist und $\pi/2$ die einzige Nullstelle in $]0, 2[$ ist und ausserdem gilt $\cos(0) = 1$, folgt $\cos(x) > 0$ für alle $x \in]0, \pi/2[$.

ii) Für den Beweis der übrigen Aussagen beachte man, dass aus dem Additionstheorem und i) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x), \; \cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$$

Daraus erhält man schrittweise die Behauptungen ii) bis iv). $\square$

Definition: Eine Funktion f heißt periodisch mit der Periode ω, wenn gilt

i) Ist $x \in \mathbb{D}_f$, so ist auch $x + \omega \in \mathbb{D}_f$,

ii) $f(x + \omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Satz: Besitzt f die Periode ω, so besitzt f auch die Perioden $\pm k\omega$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Mit ω ist auch $-\omega$ eine Periode: Für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt

$$f(x) = f(x - \omega + \omega) = f(x - \omega).$$

Es genügt daher, die Behauptung für $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen mittels Induktin nach k. Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig. Gelte sie nun für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{D}_f$:

$$f(x + (k + 1)\omega) = f((x + k\omega) + \omega) = f(x + k\omega) = f(x)$$

Dies beweist die Behauptung für $k + 1$. $\square$

Satz: Es gilt

i) $\exp(2\pi i) = 1$.

ii) Die komplexe Exponentialfunktion besitzt die Periode $\omega = 2\pi i$.

Beweis:

i) Die Formel von Euler ergibt

$$\begin{aligned} |\exp(2\pi i)| &= \exp(2\pi i) \cdot \overline{\exp(2\pi i)} = \exp(2\pi i) \cdot \exp(-2\pi i) \\ &= \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion mit i)

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi i) = \exp(z). \ \square$$

Also ist die komplexe Exponentialfunktion periodisch, während die reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist.