Karmarkar – Verfahren

PROBLEM (*in Karmarkar-Normalform*)

Bezeichnungen: $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, n \geq 2,\ m < n$

$e := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$

$\Sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, e^T x = n,\ x \geq 0 \right\}$

Lineares Programm (P): $c^T x \ \to\ \text{Min!}$

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ e^T x &= n \\ x &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Voraussetzungen (V): 1. $\text{Rang}\, A = m$

2. $Ae = 0$

2. $\min\,(\mathrm{P}) = 0.$

Das Programm (P) heißt mit den Voraussetzungen (V) *Karmarkar-Normalform.*

Bezeichnungen: $\bar{x} \in \ker A \cap \Sigma\,, \bar{x} > 0$

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{x}_n \end{pmatrix},\ \bar{B} = \begin{pmatrix} A\bar{D} \\ e^T \end{pmatrix}$$

ALGORITHMUS 3 (*Karmarkar-Verfahren*)

Input: $A \in R^{m\times n},\ c \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in (0,1),\ r := \sqrt{\frac{n}{n-1}},\ \bar{x} := e$

III.1. Optimalitätstest

Ist $c^T\bar{x} = 0$, dann ist $\bar{x}$ optimal.

STOP: Output: Optimum

III.2. Bestimmung der Fortschreitrichtung

Setze $\bar{D} := \text{diag}\,(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n),\ \bar{B} := \binom{A\bar{D}}{e^T}$.

Berechne $\bar{p} := \left[\, E - \bar{B}^T(\bar{B}\bar{B}^T)^{-1}\bar{B}\,\right] \bar{D}c\,.$

III.3. Berechnung der neuen Iterierten

Berechne $\bar{y} := e - \alpha \cdot r \cdot \frac{\bar{p}}{\|\bar{p}\|}$.

Transformiere $\bar{x}^+ := \frac{n}{\bar{x}^T\bar{y}}\,\bar{D}\bar{y}$.

Setze $\bar{x} := \bar{x}^+$ und fahre bei III.1 fort.

Karmarkar – Schema

PROJEKTIVE TRANSFORMATION: $\bar{T} : \Sigma \mapsto \Sigma$ gemäß

$$\bar{T}(x) = \frac{n}{e^T \bar{D}^{-1} x} \cdot \bar{D}^{-1} x$$

Dann gilt:
- $\bar{T}$ ist bijektiv mit $\bar{T}^{-1}(y) =$
- $\bar{T}(\lambda x) = \bar{T}(x) \quad \forall x \gneqq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften:

1. $\bar{D}^{-1} x \gneqq 0 \iff x \gneqq 0$
2. $\bar{D}^{-1} \bar{x} = e$, also $\bar{x}^T \bar{D}^{-1} x = e^T x = n$ für $x \in \Sigma \implies \bar{T}(\bar{x}) = e$
3. $\bar{D} e = \bar{x}$
4. $x \geq 0 \iff y \geq 0$ (Lemma 5.1 mit $y = \bar{T}(x)$)
5. $x \in \ker A \iff y \in \ker A\bar{D}$
6. $\bar{x}^T y = n \cdot \dfrac{\bar{x}^T \bar{D}^{-1} x}{e^T \bar{D}^{-1} x} > 0$ für $x \in \Sigma$.

Optimierungsprobleme:

$$(\mathrm{P}):\ \begin{array}{l} c^T x \to \text{Min!} \\ x \in \ker A \cap \Sigma \end{array} \quad \overset{\bar{T}}{\longleftrightarrow} \quad \left(\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{T}}}\right):\ \begin{array}{l} (\bar{D}c)^T y \to \text{Min!} \\ y \in \ker A\bar{D} \cap \Sigma \end{array}$$

nichtlineare $\downarrow$ Probleme

$$\left(\mathrm{P}^*\right):\ \begin{array}{l} (\bar{D}c)^T u \to \text{Max!} \\ u \in \ker \bar{B} \cap K_\Sigma(0, \alpha r) \end{array} \quad \overset{\bar{u}=e-\bar{y}}{\longleftrightarrow} \quad \left(\mathrm{P}^\alpha_{\bar{\mathrm{T}}}\right):\ \begin{array}{l} (\bar{D}c)^T y \to \text{Min!} \\ y \in \ker A\bar{D} \cap K_\Sigma(e, \alpha r) \end{array}$$

Projektionsoperator auf $\ker \bar{B}$: $Q = E - \bar{B}^T \left(\bar{B}\bar{B}^T\right)^{-1} \bar{B},\ \bar{p} = Q \cdot \bar{D}c$

SCHEMA EINES ITERATIONSSCHRITTES:

$$(\mathrm{P}):\ \bar{x} \in \ker A \cap \Sigma, \bar{x} > 0 \quad \overset{\bar{T}}{\longrightarrow} \quad \left(\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{T}}}\right):\ e \in \ker A\bar{D} \cap \Sigma$$

$\downarrow$ Iteration

$$(\mathrm{P}):\ \begin{array}{l} \bar{x}^+ \in \ker A \cap \Sigma, \bar{x}^+ > 0 \\ \bar{x}^+ = \bar{T}^{-1} \bar{y} \end{array} \quad \overset{\bar{T}^{-1}}{\longleftarrow} \quad \left(\mathrm{P}^\alpha_{\bar{\mathrm{T}}}\right):\ \begin{array}{l} \bar{y} \in \ker A\bar{D} \cap K_\Sigma(0, \alpha r), \\ \bar{y} = e - \alpha r \frac{\bar{p}}{\|\bar{p}\|} \end{array}$$

Karmarkar – Normalform

Gegeben: $A_0 \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $b_0 \in \mathbb{R}^k$, $c_0 \in \mathbb{R}^l$

Ausgangsproblem (P_0):

$$c_0^T u \to \text{Min!} \quad u \in \mathbb{R}^l$$
$$\left.\begin{aligned} A_0 u &\geq b_0 \\ u &\geq 0 \end{aligned}\right\} M_0$$

Duales Problem (D_0):

$$b_0^T v \to \text{Max!} \quad v \in \mathbb{R}^k$$
$$\left.\begin{aligned} A_0^T v &\leq c_0 \\ v &\geq 0 \end{aligned}\right\} N_0$$

Grundvoraussetzungen (GV):

(a) $b_0 \neq 0$ oder $c_0 \neq 0$.

(b) $M_0 \neq \emptyset$ und $N_0 \neq \emptyset$.

(c) Die Menge der Optimallösungen sei beschränkt.

(d) Es existiere ein $\hat{u} \in \mathbb{R}^l$ mit $\hat{u} \geq 0, A_0\hat{u} > b_0$.

Hilfsdaten: $H \in \mathbb{R}^{(k+l+1)\times 2(k+l)}$, $h \in \mathbb{R}^{k+l+1}$ mit

$$H := \begin{pmatrix} A_0 & -Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0^T & Id \\ c_0^T & 0^T & -b_0^T & 0^T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h := \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Karmarkar–Normalform zu (P_0): $z \in \mathbb{R}^{2(l+k)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n = 2(k+l+1)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} z \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \to \underset{z,\alpha,\beta}{\text{Min!}}$$

$$\begin{pmatrix} H & -h & h - He \\ e^T & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$