Analysis Kurs 4
Übungen Physiker am 09.04.2008

1. Man untersuche, ob folgende Mengensysteme Mengenalgebren bzw. σ-Algebren sind:

   a) Alle endlichen Teilungen einer festen Menge X.

   b) Alle abzählbaren Teilmengen einer festen Menge X.

2. μ sei Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$. Man zeige:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ für } A, B \in \mathfrak{A}.$$

3. μ sei Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$. Man zeige: Wenn $A_n \in \mathfrak{A}$ für $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

4. Es seien $X = \mathbb{N}, \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(x), a_n \in [0, +\infty)$ für $n \in \mathbb{N}$.
   Man zeige: Es gibt genau ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $\mu(\{n\}) = a_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
   Wann ist $\mu(X) < \infty$?

5. X sei eine unendliche Menge, die nicht abzählbar ist.
   $\mathfrak{A} := \{M \subseteq X : \text{entweder } M \text{ oder } M^c \text{ ist endlich oder abzählbar}\}$,
   $\mu(M) := \begin{Bmatrix} 0, & \text{falls } M \text{ endlich oder abzählbar ist} \\ 1, & \text{falls } M^c \text{ endlich oder abzählbar ist} \end{Bmatrix}.$
   Man zeige: $\mathfrak{A}$ ist eine σ-Algebra und μ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}$.

Abgabe: 16.04.2008