Serie 9

1. Sei X überabzählbar und definiere $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$durch

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ überabzählbar.} \end{cases}$$

Zeige:

a) μ^* ist ein äußeres Maß. *(2 Pkte.)*

b) Bestimme die Klasse der μ^*-messbaren Mengen in X. *(2 Pkte.)*

2. Es sei $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \big\{ (a, a+l) \times (b, b+l) \,|\, a, b \in \mathbb{R},\, l > 0 \big\}$ und $\tau\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$, $\tau(Q) = \operatorname{diam}(Q)$ der Durchmesser. Sei μ^* das durch τ bestimmte äußere Maß und $T_0, \ldots, T_4 \in \mathcal{F}$ gegeben durch

$$T_0 = (0,1) \times (0,1),\, T_1 = (0,1/3) \times (0,1/3),\; T_2 = (0,1/3) \times (2/3,1),$$
$$T_3 = (2/3,1) \times (0,1/3),\; T_4 = (2/3,1) \times (2/3,1)\,.$$

a) *Zeige*: $\mu^*\big(\bigcup_{i=1}^4 T_i\big) \;<\; \sum_{i=1}^4 \mu^*(T_i)$ und folgere daraus, daß kein T_i μ^*-messbar ist. *(2 Pkte.)*

b) *Zeige*: Kein $\emptyset \neq Q \in \mathcal{F}$ ist μ^*-messbar. *(2 Pkte.)*

3. Sei $\mathcal{T}$ die Familie der offenen Mengen im $\mathbb{R}^N$ und $s > 0$. Sei $\tau_s\colon \mathcal{T} \to [0,\infty]$ die Funktion

$$\tau_s(U) \;=\; \big(\operatorname{diam}(U)\big)^s\,.$$

Sei $\mathcal{T}_n = \{\, T \in \mathcal{T} \mid \operatorname{diam} T \leq \frac{1}{n} \,\}$ und μ_n^* das durch $\mathcal{T}_n$ definierte äußere Maß.

a) *Zeige*: $\mu_{n+1}^*(E) \geq \mu_n^*(E)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^N$, und folgere, daß $\mu_{(s)}^*(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n^*(E)$ f.a. $E \subset \mathbb{R}^N$ wohldefiniert ist. *(2 Punkte.)*

b) *Zeige*: $\mu_{(s)}^*$ ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^N$. *(2 Punkte.)*

c) *Zeige*: Für alle $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\mu_{(s)}^*(T) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } s > N, \\ \infty, & \text{falls } s < N\,. \end{cases}$$

(2 Punkte.)

d) Sei $\mu_{(s)}^*(E) < \infty$ und $t > s$. *Zeige*: $\mu_{(t)}^*(E) = 0$. *(2 Punkte.)*

Für alle $E \subset \mathbb{R}^N$ heißt

$$\dim_{HD} E \;=\; \sup\{\, s > 0 \,|\, \mu_{(s)}^*(E) = \infty \,\}$$

die **Hausdorff-Dimension** von E, mit $\dim_{HD} E \;=\; 0$, falls alle $\mu_{(s)}^*(E) \;=\; 0$ f.a. $s \;>\; 0$. Also gilt $\dim_{HD} \mathbb{R}^N = N$.

Rückgabe: In den Kasten am 15.12.